L'intégrale de Leonhard Euler : esquisse historique sur la fonction Gamma

Philip J. Davis

À la mémoire de Milton Abramowitz

Beaucoup de personnes pensent que les idées mathématiques sont statiques. Elles pensent que ces idées ont trouvé leur origine à un moment donné de l'histoire passée et qu'elles resteront inchangées pour tous les temps futurs. Il y a de bonnes raisons à de telles croyances. Après tout, la formule pour l'aire du disque était πr^2 du temps d'Euclide et continue d'être πr^2 au jour d'aujourd'hui. Mais pour quelqu'un qui connaît les mathématiques de l'intérieur, le sujet ressemble plutôt à un être vivant. Il grandit chaque jour par accrétion de nouvelles informations, il évolue chaque jour en s'observant lui-même et en observant le monde selon de nouveaux points de vue intéressants, il maintient un équilibre régulier en oubliant ce qui n'est plus pertinent parmi ses accomplissements passés.

Le but du présent essai est d'illustrer ce processus de croissance. Nous avons choisi un objet mathématique, la fonction gamma, et montrons comment elle a évolué conceptuellement et du point de vue de son contenu depuis l'époque d'Euler jusqu'au traité mathématique de Bourbaki, et comment, dans sa croissance, cette fonction a participé au développement général des mathématiques lors des deux et un quart derniers siècles. Des fonctions appelées “fonctions mathématiques élevées”, la fonction gamma est indéniablement la plus fondamentale. Elle est assez simple pour être présentée à de jeunes gens en université mais suffisamment profonde pour avoir amené des contributions avancées par les meilleurs mathématiciens. Et elle est suffisamment compacte pour pouvoir être présentée dans un bref article.

La fonction gamma est née en 1729 dans une lettre entre un mathématicien suisse qui était à St. Petersbourg et un mathématicien allemand alors à Moscou. Le premier : Leonhard Euler (1707-1783), alors âgé de 22 ans, mais destiné à devenir un mathématicien prestigieux, le plus grand mathématicien du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Le second : Christian Goldbach (1690-1764), un savant, un homme possédant de multiples talents et qui correspondit avec les plus grands penseurs de son époque. Il était une sorte de mathématicien dilettante, même s'il fut également l'homme qui léguerait à l'avenir un problème de théorie des nombres si facile à stipuler et si difficile à prouver que même aujourd'hui, ce problème reste comme un défi sur l'horizon mathématique.

La naissance de la fonction gamma est due au mélange de plusieurs courants mathématiques. Le premier de ces courants est celui de la théorie de l'interpolation, un sujet très pratique produit essentiellement par les mathématiciens anglais du XVII$^{\text{ème}}$ siècle mais dans lequel tous les mathématiciens aimaient plonger de temps en temps. Le second courant était celui du calcul intégral et de la construction systématique des formules de l'intégration indéfinie, un processus qui s'était régulièrement développé pendant de nombreuses années. Un certain problème ostensiblement simple d'interpolation avait émergé et avait été étudié sans succès par Goldbach et par Daniel Bernoulli (1700-1784) et même plus tôt encore par James Stirling (1692-1770). Le problème fut posé à Euler. Euler annonça sa solution à Goldbach dans deux lettres qui seraient le début d'une intense correspondance qui continuerait durant toute la vie de Goldbach. La première lettre, datée du 13 octobre 1729 traite du problème de l'interpolation, tandis que la seconde datée du 8 janvier 1730 traite d'intégration et lie les deux ensemble. Euler envoya à Goldbach une esquisse générale, mais en une année, il publia tous les détails dans un article *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini gen-*

Bureau national des unités, Washington, D. C.

erales algebraice dari nequeunt. Cet article peut maintenant être trouvé dans le volume I de la réimpression des *Opera Omnia* d'Euler.

Puisque le problème de l'interpolation est le plus facile, commençons par celui-là. L'une des séquences d'entiers les plus simples qui amène une théorie intéressante est $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots$ Ce sont les nombres triangulaires, ainsi appelés parce qu'ils représentent le nombre d'objets qui peuvent être placés dans des tableaux triangulaires de différentes tailles. Appelons le n-ième nombre triangulaire T_n. Il y a une formule pour T_n que l'on apprend en cours d'algèbre : $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Que fait précisément cette formule ? En premier lieu, elle simplifie le calcul en réduisant un grand nombre d'additions à trois opérations fixes : une addition, une multiplication et une division. Ainsi, plutôt que d'ajouter les cent premiers nombres pour obtenir T_{100}, nous pouvons calculer $T_{100} = \frac{1}{2}(100)(100+1) = 5050$. Deuxièmement, même si cela ne fait pas vraiment sens de demander, disons, la somme des $5\frac{1}{2}$ premiers nombres, la formule pour $T_{5\frac{1}{2}}$ fournit une valeur pour cette somme. Dans ce cas, la formule donne $T_{5\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(5\frac{1}{2})(5\frac{1}{2}+1) = 17\frac{7}{8}$. De cette façon, la formule augmente l'étendue du problème original à des valeurs de la variable autres que celles pour lesquelles le problème avait été défini au départ et résout le problème de l'interpolation entre des valeurs élémentaires connues.

Ce type de questions, selon lesquelles on s'interroge au sujet d'une extension du sens, ont souvent été étudiées au XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles. Considérons par exemple les algèbres d'exposants. La quantité a^m est définie initialement comme le produit de m nombres a. Cette définition a un sens quand m est un entier positif, mais que peut valoir $a^{5\frac{1}{2}}$? Le produit de $5\frac{1}{2}$ nombres a ? Les définitions mystérieuses $a^0 = 1, a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, a^{-m} = 1/a^m$ qui résolvent cette énigme et qui sont utilisées si fertilement en algèbre ont été écrites explicitement pour la première fois par Newton en 1676. Elles sont justifiées par une utilité qui découle du fait que la définition amène à des fonctions exponentielles continues et parce que la loi des exposants $a^m.a^n = a^{m+n}$ a un sens pour tous les exposants qu'ils soient des entiers positifs ou pas.

D'autres problèmes de ce type se sont avérés bien plus difficiles. Ainsi, Leibniz introduisit la notation d^n pour la n-ième itérée de l'opération de différentiation. De plus, il identifia d^{-1} avec $\int$ et d^{-n} avec l'intégrale itérée. Il essaya alors d'amener un certain sens au symbole d^n quand n est n'importe quelle valeur réelle. Qu'est-ce alors que la $5\frac{1}{2}$-ième dérivée d'une fonction ? Cette question a dû attendre presque deux siècles pour obtenir une réponse satisfaisante.

Les factorielles									
n :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n! :	1	2	6	24	120	720	5040	40320	...

Test d'intelligence
Question : Quel nombre devrait être inséré dans la ligne du dessous
à mi-chemin entre les nombres 5 et 6 de la ligne du dessus ?
Réponse d'Euler : 287.8852..., Réponse d'Hadamard : 280.3002

Mais retournons à notre séquence de nombres triangulaires. Si nous changeons les signes d'additions en signes de multiplications, nous obtenons une nouvelle séquence: $1, 1.2, 1.2.3, \ldots$. C'est la séquence des factorielles. Les factorielles sont habituellement abrégées en $1!, 2!, 3!, \ldots$ et les cinq premières factorielles sont 1, 2, 6, 24, 120. Elles augmentent très vite en taille. Le nombre 100! si on souhaite écrire tous ses chiffres a 158 chiffres. Contrairement à $T_{100} = 5050$ qui a seulement quatre chiffres. Les factorielles sont omniprésentes en mathématiques ; on peut difficilement ouvrir un livre d'analyse mathématique sans en trouver parsemées un peu partout. Ceci étant dit, est-il possible d'obtenir une formule simple pour calculer les factorielles ? Et est-il possible d'interpoler entre deux factorielles ? Que devrait valoir $5\frac{1}{2}!$? (voir

Fig. 1). C'est ce problème d'interpolation qui a amené à la fonction gamma, le problème de l'interpolation de Stirling, de Bernoulli, et de Goldbach. Comme nous le savons, ces deux problèmes sont liés, car lorsqu'on a une formule, il y a une possibilité d'intercaler des valeurs intermédiaires parmi celles déjà trouvées. Et c'est là qu'une chose surprenante a lieu. Il n'y a pas, en fait il ne peut y avoir, de formule pour les factorielles qui soit du type simple qui a été trouvé pour T_n. Cela est implicite dans le titre qu'Euler a choisi pour son article. Traduisons le latin et nous obtenons *Sur les progressions transcendantes, c'est-à-dire celles dont le terme général ne peut être exprimé algébriquement*. La solution à l'interpolation factorielle est à trouver dans des processus plus profonds que la "simple algèbre". On avait besoin de processus infinis.

Pour apprécier un peu mieux le problème auquel Euler était confronté, il est utile d'avancer un peu dans le temps et de formuler ce problème selon les normes rédactionnelles d'aujourd'hui : trouver une fonction raisonnablement simple qui prend pour valeurs celles des factorielles $1, 2, 6, \dots$ sur les nombres entiers $1, 2, 3, \dots$. Aujourd'hui, une fonction est une relation entre deux ensembles de nombres qui assigne à un nombre du premier ensemble un nombre du second ensemble. Ce qui est souligné, c'est la relation, et non la nature des règles qui servent à déterminer la relation. Pour aider les étudiants à visualiser le concept de fonction dans sa pleine généralité, les professeurs de mathématiques sont habitués à dessiner une courbe pleine de torsions et discontinuités. Plus la courbe en montre, plus elle est supposée être générale. Etant donnés, alors, les points $(1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), \dots$ et si l'on adopte le point de vue qui vient juste d'être proposé, le problème de l'interpolation consiste à trouver une courbe qui passe par les points en question. Une telle courbe est ridiculement aisée à trouver. On peut même trouver un nombre illimité de telles courbes différentes. Prenez simplement un stylo et dessinez une courbe - n'importe laquelle - qui passe par les points. Une telle courbe définit automatiquement une fonction qui répond au problème de l'interpolation. De cette façon, avoir libéré la définition du concept de fonction résout trivialement le problème, et enrichit les mathématiques, mais vraiment très peu. La tâche d'Euler était différente. Au début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, une fonction était plus ou moins synonyme d'une formule, et par formule, on souhaitait trouver une expression qui pourrait être calculée par des manipulations élémentaires faisant intervenir des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances, calculs de racines, d'exponentielles, de logarithmes, différentiations, intégrations, séries infinies, i.e. provenant des processus ordinaires de l'analyse mathématique. Une telle formule était appelée une *expressio analytica*, une expression analytique. La tâche d'Euler était de trouver, si possible, une expression analytique engendrée naturellement à partir du corpus des mathématiques qui calculerait la factorielle d'un nombre positif fourni, mais qui continuerait d'avoir du sens pour d'autres valeurs de la variable.

Il est difficile de rendre compte précisément du cours exact de la découverte scientifique. Ceci est particulièrement vrai en mathématique lorsqu'on omet dans les livres et articles de rendre compte des faux départs, des années initiales de bafouillements, et où l'on peut développer un sujet en avant ou en arrière ou sur le côté pour augmenter l'effet dramatique. Comme l'a dit un mathématicien renommé, un résultat mathématique doit apparaître tout droit sorti des cieux comme un *deus ex machina* pour que les étudiants le vérifient et l'acceptent mais ne le comprennent pas. Apparemment, Euler, faisant des expériences sur des produits infinis de nombres, eut la chance de noter que si n est un entier positif,

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\dots = n!. \tag{1}$$

En laissant de côté toutes les questions délicates telles que la convergence du produit infini, le lecteur peut vérifier cette équation en éliminant tous les facteurs communs qui apparaissent au numérateur et au dénominateur de l'expression du côté gauche de l'équation. De plus, le côté gauche est défini (au moins formellement) pour tout n entier non négatif. Euler nota aussi que lorsque la valeur $n = \frac{1}{2}$[1] est choisie, le côté gauche fournit (après quelques manipulations) le célèbre produit infini du chercheur britannique John Wallis (1616-1703):

$$\left(\frac{2.2}{1.3}\right)\left(\frac{4.4}{3.5}\right)\left(\frac{6.6}{5.7}\right)\left(\frac{8.8}{7.9}\right)\ldots = \pi/2. \tag{2}$$

Avec cette découverte, Euler aurait pu s'arrêter. Son problème était résolu. En effet, la théorie complète de la fonction gamma peut être basée sur le produit infini (1) qui s'écrit de façon plus conventionnelle aujourd'hui comme

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}. \tag{3}$$

Pourtant, il continua. Il observa que son produit présentait le curieux phénomène suivant : pour quelques valeurs de m, notamment les entiers, la formule donnait des entiers, alors que pour d'autres valeurs, par exemple $n = \frac{1}{2}$, la formule prenait une valeur faisant intervenir π. Maintenant, π signifiait des cercles et leur carré, et les carrés signifiaient des intégrales, et Euler était familier des intégrales qui présentaient le même phénomène. Il chercha alors une transformation qui l'autoriserait à exprimer son produit comme une intégrale.

Il prit l'intégrale $\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$. Des cas particuliers de cette intégrale avaient été discutés par Wallis, par Newton, et par Stirling. C'était une intégrale problématique à gérer, car l'intégrale indéfinie n'est pas toujours une fonction élémentaire de x. En supposant que n est un entier, mais que e et une valeur arbitraire, Euler développa $(1-x)^n$ par le théorème binomial, et sans difficulté trouva que

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1.2\ldots n}{(e+1)(e+2)\ldots(e+n+1)}. \tag{4}$$

L'idée d'Euler fut alors d'isoler $1.2\ldots n$ du dénominateur de façon à obtenir une expression de $n!$ comme une intégrale. Il fit de la sorte. (Ici, nous suivons la propre formulation d'Euler et ses notations, en marquant d'une * les formules qu'on trouve dans l'article original. Euler notait par le signe $\int$ l'intégrale $\int_0^1$). Il substitua f/g pour e et trouva

$$\int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}.\frac{1.2\ldots n}{(f+g)(f+2.g)\ldots(f+n.g)} \tag{5}$$

Et ainsi,

$$\frac{1.2\ldots n}{(f+g)(f+2.g)\ldots(f+n.g)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{f/g}dx(1-x)^n. \tag*{(6)*}$$

Il observa qu'il pouvait isoler le $1.2\ldots n$ s'il supposait $f = 1$ et $g = 0$ dans le membre gauche, mais que s'il faisait ainsi, il obtiendrait du côté droit une forme indéterminée qu'il écrivit étrangement comme

$$\int \frac{x^{1/0}dx(1-x)^n}{0^{n+1}}. \tag*{(7)*}$$

[1] Ici, il y a une petite erreur : dans la première page de l'article d'Euler derrière ce lien http://denisevellachemla.eu/De_progressionibus_transcendentibus_seu_quarum_termini_generales.pdf, Euler indique que c'est pour la valeur 2 que le côté gauche vaut le produit infini de Wallis ; pour $n = \frac{1}{2}$, Euler aboutit de plusieurs manières à la valeur $\frac{\pi}{4}$, l'aire d'un disque dont le diamètre vaudrait 1.

Il procéda alors ainsi pour trouver la valeur de l'expression (7)*. D'abord, il remplaça x par $x^{g/(f+g)}$. Cela lui donna

$$\frac{g}{f+g} x^{-f/(g+f)} dx \tag{8*}$$

à la place de dx et ainsi, le membre droit de (6) devient

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int \frac{g}{f+g} dx (1 - x^{g/(f+g)})^n. \tag{9*}$$

Une fois de plus, Euler fit un essai d'affectation $f = 1, g = 0$ en ayant, on le suppose, d'abord réduit l'intégrale à

$$\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{1 - x^{g/(f+g)}}{g/(f+g)} \right)^n dx, \tag{10*}$$

et cela l'amena à l'indéterminée

$$\int dx \frac{(1-x^0)^n}{0^n}. \tag{11*}$$

Il considéra alors l'expression liée $(1 - x^z)/z$ lorsque z s'annule. Il différencia le numérateur et le dénominateur, comme il dit, par la règle (de l'Hospital) connue et obtint

$$\frac{-x^z dz lx}{dz} \qquad (lx = \log x), \tag{12*}$$

qui pour $z = 0$ produit $-lx$. Ainsi,

$$(1 - x^0)/0 = -lx \tag{13*}$$

et

$$(1 - x^0)^n/0^n = (-lx)^n. \tag{14*}$$

Il conclut alors que

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx. \tag{15}$$

Cela lui donna ce qu'il voulait, une expression pour $n!$ comme une intégrale dans laquelle des valeurs autres que des entiers positifs peuvent être utilisées. Le lecteur est encouragé à formuler ses propres critiques de la dérivation d'Euler.

Les étudiants en calcul avancé rencontrent en général l'intégrale d'Euler pour la première fois sous la forme

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad e = 2.71828\ldots. \tag{16}$$

Cette modification de l'intégrale (15) ainsi que la lettre grecque Γ sont dues à Adrien Marie Legendre (1752-1833). Legendre appelle l'intégrale (4) avec laquelle Euler a commencé sa dérivation la première intégrale Eulérienne et (15) la seconde intégrale Eulérienne. La première intégrale Eulérienne est actuellement connue sous le nom de fonction Beta et elle s'écrit maintenant conventionnellement ainsi

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx. \tag{17}$$

Avec les outils disponibles de calcul avancé, il est facile d'établir (comme les grandes avancées passées nous semblent compréhensibles et dupliquables !) que l'intégrale a un sens quand $x > 0$ et qu'elle permet la définition d'une certaine fonction $\Gamma(x)$ pour ces valeurs. De plus,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{18}$$

dès que n est un entier positif[2]. On établit donc de là pour tout $x > 0$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1). \tag{19}$$

C'est à cause de cette équation qu'on appelle cette relation la relation de récurrence de la fonction gamma et dans les années qui ont suivi Euler, elle a joué, comme nous allons le voir, un rôle de plus en plus important dans sa théorie. Ces faits, ainsi que les relations entre les deux types d'intégrales d'Euler

$$B(m,n) = \Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n) \tag{20}$$

et les formules très importantes de Stirling.

$$\Gamma(x) \sim e^{-x}x^{x-1/2}\sqrt{(2\pi)}, \tag{21}$$

qui nous donnent une expression approchée relativement simple pour $\Gamma(x)$ où x est grand, sont à peu près tout ce que les étudiants en calcul avancé apprennent de la fonction gamma. Chronologiquement parlant, cela les place à peu près en l'an 1750. Le jeu vient tout juste de commencer.

De la même façon que le simple désir d'étendre le calcul de la factorielle à des valeurs entre les entiers ont amené la découverte de la fonction gamma, le désir de l'étendre à des valeurs négatives et complexes a amené son développement ultérieur et son interprétation plus profonde. Un questionnement naïf, un jeu sans inhibition avec les symboles peut avoir été à sa toute première origine. Quelle est la valeur de $(-5\frac{1}{2})!$? Quelle est la valeur de $\sqrt{-1}\,!$? Dans les premières années du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, l'action s'est élargie et déplacée dans le domaine complexe (l'ensemble de tous les nombres de la forme $x + iy$, où $i = \sqrt{-1}$, et c'est alors la théorie des fonctions d'une variable complexe qui allait devenir un des chapitres majeurs des mathématiques. Le déplacement vers le plan complexe a été initié par Karl Friedrich Gauss

[2] La notation de Legendre déplace l'argument. Gauss a introduit une notation $\pi(x)$ dégagée de ce défaut, la notation de Legendre a gagné, mais elle continue de tourmenter de nombreuses personnes. On peut rencontrer toutes les notations Γ, π, et ! de nos jours.

(1777-1855), qui commença avec le produit d'Euler comme point de départ. Des noms très illustres sont maintenant impliqués et non pas une seule étape d'actions mais de nombreuses étapes. Il serait trop long de citer et décrire chacune des étapes qui furent parcourues. Nous nous contenterons d'une large esquisse.

Trois éléments importants sont maintenant connus : l'intégrale d'Euler, le produit d'Euler, et la relation fonctionnelle ou de récurrence $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1),\ x > 0$. Cette dernière est la généralisation du fait arithmétique élémentaire que pour les entiers positifs, $(n+1)n! = (n+1)!$. C'est une relation particulièrement utile d'autant plus qu'elle nous permet de l'appliquer autant de fois que nécessaire pour réduire le problème de l'évaluation d'une factorielle d'un nombre quelconque compris entre 0 et 1. Ainsi, si nous écrivons $n = 4\frac{1}{2}$ dans la formule ci-dessus, nous obtenons $(4\frac{1}{2}+1)! = 5\frac{1}{2}(4\frac{1}{2})!$. Si nous pouvions seulement trouver ce que vaut $(4\frac{1}{2})!$, alors nous saurions ce que vaut $(5\frac{1}{2})!$. Ce procédé de réduction à des nombres plus petits peut toujours être appliqué et amène à

$$(5\tfrac{1}{2})! = (3/2)(5/2)(7/2)(9/2)(11/2)(1/2)! \tag{22}$$

et puisque nous avons $(\frac{1}{2})! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ de (1) et (2), nous pouvons calculer notre réponse. Un tel dispositif est évidemment très important pour qui doit effectuer des calculs avec la fonction gamma. D'autres informations peuvent être obtenues de la relation de récurrence. Bien que la formule $(n+1)n! = (n+1)!$ comme condensé de l'identité arithmétique $(n+1).1.2\ldots n = 1.2\ldots n.(n+1)$ n'ait du sens que pour $n = 1, 2$, etc., des insertions à l'aveugle d'autres valeurs produisent des résultats intéressants. Ainsi, en insérant $n = 0$, on obtient $0! = 1$. Avec successivement $n = -5\frac{1}{2}$, $n = -4\frac{1}{2}, \ldots$ et en réduisant vers le haut, on découvre

$$(-5\tfrac{1}{2})! = (2/1)(-2/1)(-2/3)(-2/5)(-2/7)(-2/9)(1/2)! \tag{23}$$

Puisque nous connaissons déjà la valeur de $(\frac{1}{2})!$, nous pouvons calculer $(5\frac{1}{2})!$. De cette manière, la relation de récurrence nous permet de calculer les valeurs des factorielles de nombres négatifs.

En retournant maintenant à l'intégrale d'Euler, on peut montrer que pour les valeurs de la variable inférieures à 0, les théorèmes habituels de l'analyse ne suffisent pas à attribuer un sens à l'intégrale, car elle est divergente. De l'autre côté, elle a du sens et elle fournit une valeur si on substitue à x n'importe quel nombre complexe de la forme $a + bi$ avec $a > 0$. Avec de telles substitutions, l'intégrale devient alors une fonction à valeur complexe qui est définie pour tous les nombres complexes dans la moitié droite du plan et qui coïncide avec la fonction gamma ordinaire pour les valeurs réelles. Le produit d'Euler est même plus fort. Avec comme exceptions $0, -1, -2, \ldots$, tout nombre complexe quel qu'il soit peut être inséré comme variable et le produit infini converge alors, fournissant une valeur. Ainsi il apparaît que nous avons à notre disposition un certain nombre de méthodes, conceptuellement et opérationnellement différentes pour étendre le domaine de définition de la fonction gamma. Ces différentes méthodes fournissent-elles le même résultat ? Oui, mais pourquoi ?

La réponse peut être trouvée dans la notion de fonction analytique. C'est le point focal de la théorie des fonctions à variable complexe et une excroissance de l'ancienne notion d'expression analytique. Comme nous l'avons insinué, les mathématiques de l'époque étaient vagues à propos de cette notion, l'expression signifiant alors fonction que l'on rencontre d'une façon naturelle en analyse mathématique. Quand plus tard, J. B. J. Fourier (1768-1830) a découvert que les fonctions de portée générale et les fonctions avec des caractéristiques déplaisantes pouvaient être produites par une superposition infinie de sinus et cosinus ordinaires, il devint clair que le critère tel que le fait de “rencontrer de telles fonctions de manière naturelle” devait être oublié. La découverte a simultanément forcé un élargissement de l’idée de fonction et un rétrécissement de ce que recouvrait la notion de fonction analytique.

Les fonctions analytiques ne sont pas si arbitraires dans leur comportement. Au contraire, elles possèdent de forts liens internes. Définies très précisément comme des fonctions qui possèdent une dérivée complexe ou de manière équivalente comme des fonctions qui possèdent des expansions en séries de puissances $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$, elle montrent le phénomène remarquable d’“action à distance.”. Cela signifie que la détermination du comportement d’une fonction analytique sur tout intervalle aussi petit soit-il est suffisante pour entraîner la possibilité de déterminer son comportement partout ailleurs ; son domaine potentiel de définition et ses valeurs sont théoriquement obtenables à partir de cette information. Les fonctions analytiques, de plus, obéissent au principe de permanence de relations fonctionnelles ; si une fonction analytique satisfait dans certaines parties de son domaine de définition une certaine relation fonctionnelle, alors elle doit le faire partout où elle est définie. Inversement, une telle relation peut être utilisée pour étendre la définition aux régions inconnues. Notre compréhension du processus de prolongement analytique, selon la façon dont ce phénomène est connu, est basé sur le travail de Bernhard Riemann (1826-1866) et Karl Weierstrass (1815-1897). La fonction à valeurs complexes qui résulte de la substitution de nombres complexes dans l’intégrale d’Euler est une fonction analytique. La fonction qui provient d’un produit eulérien est une fonction analytique. La relation de récurrence pour la fonction gamma si elle est satisfaite dans une région doit l’être dans toute autre région dans laquelle la fonction peut être “prolongée” analytiquement et peut par exemple être utilisée pour effectuer de telles extensions. Toutes les portions du plan complexe, à l’exception des valeurs $0, -1, -2, \ldots$ sont accessibles par la fonction gamma complexe qui est devenue l’unique extension analytique de l’intégrale d’Euler aux valeurs complexes (voir Fig. 3).

THE GAMMA FUNCTION

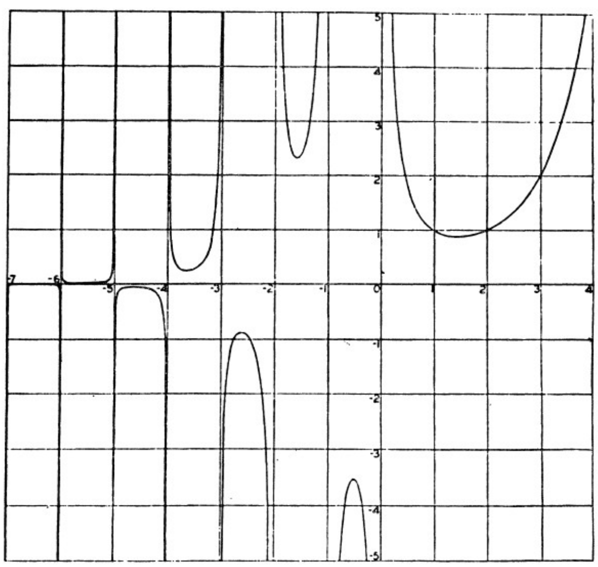

FIG. 2*

Pour comprendre pourquoi certains points doivent être exclus, observons que $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, et lorsque x tend vers 0, nous obtenons $\Gamma(0) = 1/0$. Cela vaut $+\infty$ ou $-\infty$ selon que 0 est approché par des valeurs positives ou négatives. L’équation fonctionnelle (19) induit alors ce comportement encore et encore à chaque entier négatif. La fonction gamma (réelle) comprend un nombre infini de portions déconnectées s’ouvrant vers le haut et vers le bas alternativement. Les portions correspondant à des valeurs négatives sont chacune resserrées en une bande infinie d’une unité de large, mais la plus grande portion qui correspond aux

x positifs et qui contient les factorielles est de largeur infinie (voir Fig. 2 [3]). Ainsi, il y a des points exclus pour la fonction gamma, ces points auxquels elle montre du point de vue ordinaire (des variables réelles) un comportement plutôt déplaisant et capricieux.

THE ABSOLUTE VALUE OF THE COMPLEX GAMMA FUNCTION, EXHIBITING THE POLES AT THE NEGATIVE INTEGERS

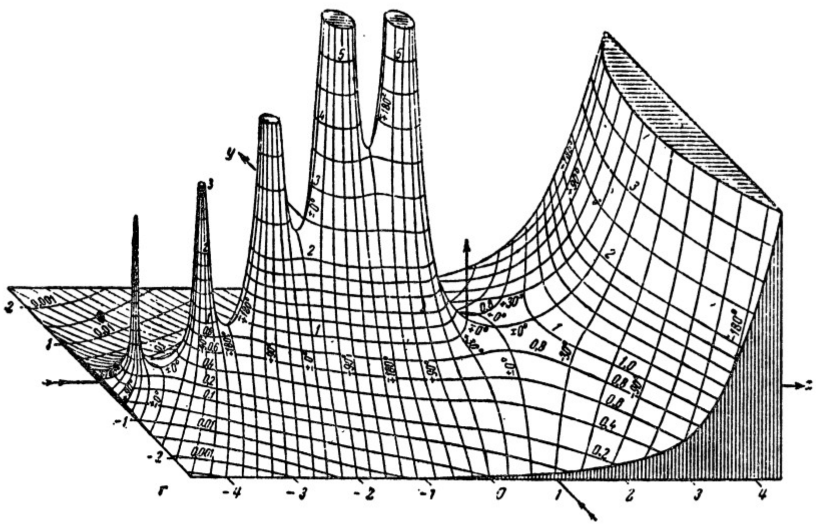

FIG. 3*

Mais du point de vue complexe, ces points au comportement singulier (singulier au sens de Sherlock Holmes) méritent une étude particulière et deviennent une part importante de l'histoire. Dans les images de la fonction gamma complexe, ils se présentent comme une rangée infinie de "stalagmites," chacune de hauteur infinie (celles sur la figure sont nécessairement tronquées) qui deviennent de plus en plus aigues comme elles vont vers l'infini (voir Fig. 3[4]). On les appelle des pôles. Les pôles sont des points où la fonction a un comportement infini de type spécialement simple, un comportement ressemblant à celui de fonctions simples telles que l'hyperbole $y = 1/x$ en $x = 0$ ou de $y = \tan x$ en $x = \pi/2$. La théorie des fonctions analytiques s'intéresse spécialement à ce comportement singulier, et consacre beaucoup de pages à l'étude des singularités. Les fonctions analytiques possèdent de nombreuses sortes de singularités et celles qui n'ont que des pôles sont appelées méromorphes. Il y a aussi des fonctions qui ont assez de chance pour n'avoir aucune singularité pour des arguments finis. De telles fonctions forment une élite et sont connues sous le nom de fonctions entières. Elles sont semblables à des polynômes tandis que les fonctions méromorphes sont semblables à des quotients de polynômes. La fonction gamma est méromorphe. Son inverse, $1/\Gamma(x)$, n'a au contraire aucun point exclus. Elle ne présente de problème nulle part. Aux points $0, 1, 2, \ldots$, elle s'annule simplement. Et une valeur de 0 qui advient une infinité de fois, rappelle fortement la fonction sinus.

Lors du réveil par l'extension au domaine complexe, de nombreuses identités remarquables surgissent, et même si certaines d'entre elles peuvent être et furent obtenues sans référence au plan complexe, elles acquièrent une signification plus profonde et plus riche lorsqu'on les regarde selon ce point de vue étendu. Il y a la formule de réflexion d'Euler

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z. \tag{24}$$

[3]De H. T. Davis, Tables des fonctions mathématiques supérieures, vol. I, Bloomington, Indiana, 1933.
[4]De : E. Jahnke et F. Emde, Tafeln höherer Funktionen, 4$^{\text{ème}}$ éd., Leipzig, 1948.

Il peut être facilement montré, en utilisant la relation de récurrence de la fonction gamma, que le produit $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ est une fonction périodique de période 2 ; mais malgré le fait que $\sin \pi z$ est une des fonctions périodiques les plus simples, qui aurait pu anticiper la relation (24) ? Qu'est-ce que la trigonométrie, après tout, a à voir avec la séquence 1, 2, 6, 24 par laquelle la discussion dans son ensemble a commencé ? C'est un bel exemple des formes délicates qui rendent les mathématiques de cette période si magiques. Du point de vue complexe, une raison partielle de cette identité provient de la similarité entre les zéros de la fonction sinus et les pôles de la fonction gamma. On a la formule de duplication

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2} 2^{2z-1/2} \Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \tag{25}$$

découverte par Legendre et étendue par Gauss dans ses recherches sur la fonction hypergéométrique à la formule de multiplication

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{1/2(1-n)} n^{nz-1/2} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) \tag{26}$$

Il y a de jolies formules pour les dérivées de la fonction gamma comme

$$d^2 \log \Gamma(z)/dz^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \ldots . \tag{27}$$

Voici l'exemple d'un type de séries infinies à partir desquelles G. Mittag-Leffler (1846-1927) créa plus tard sa théorie des développements des fonctions méromorphes en fractions partielles. Il y a une relation étroite entre la fonction gamma et la fonction zeta qui a été d'une importance fondamentale dans l'étude de la distribution des nombres premiers,

$$\zeta(z) = \zeta(1-z)\Gamma(1-z) 2^z \pi^{z-1} \sin\tfrac{1}{2}\pi z, \tag{28}$$

où

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots . \tag{29}$$

Une histoire intéressante est attachée à cette formule. Elle a d'abord été démontrée par Riemann en 1859 et elle lui a été attribuée par convention. Puis en 1894, on a découvert qu'une version modifiée de l'identité apparaissait dans un certain travail d'Euler effectué en 1749. Euler n'avait pas revendiqué d'avoir prouvé la formule. Pourtant, il la "vérifia" pour les entiers, pour $\frac{1}{2}$, et pour $3/2$. La vérification pour $\frac{1}{2}$ se fait par substitution directe, mais pour toutes les autres valeurs, Euler travaille avec des séries infinies divergentes. Cela a été fait plus de 100 ans avant que ne naisse une théorie solide sur ces séries, mais avec une intuition infaillible, Euler réussit à les ajouter par ce que l'on appelle de nos jours la méthode de sommation d'Abel. Le cas $3/2$ est encore plus intéressant. Là, en invoquant à la fois les séries divergentes et l'évaluation numérique, il réussit à obtenir un accord numérique jusqu'à la cinquième décimale ! Tout ce travail le convainquit de la vérité de son identité. Les preuves modernes rigoureuses n'ont pas besoin de la théorie des séries divergentes, mais les notions de prolongement analytique sont cruciales.

Pour l'unité essentielle de la fonction gamma sur la totalité du plan complexe, il est théoriquement et esthétiquement important d'avoir une formule qui marche pour tous les nombres complexes. Une telle formule a été fournie en 1848 par F. W. Newman :

$$(30) \qquad 1/\Gamma(z) = ze^{\gamma z}\left\{(1+z)e^{-z}\right\}\left\{(1+z/2)e^{-z/2}\right\}\dots, \qquad \text{où } \gamma = .5772156649\dots.$$

Cette formule est essentiellement une factorisation de $1/\Gamma(z)$ et est proche d'une factorisation de polynômes. Elle montre clairement quand la fonction s'évanouit. En annulant chaque facteur, on trouve que $1/\Gamma(z)$ est nul pour $z = 0, z = -1, z = -2, \dots$. Dans les mains de Weierstrass, ce résultat est devenu le point de départ de son étude particulière de la fonction gamma. Weierstrass était intéressé par la manière dont des fonctions autres que polynomiales peuvent être factorisées. Un certain nombre de factorisations isolées étaient alors connues, la formule de Newman (30) et la factorisation plus ancienne du sinus

$$(31) \qquad \sin \pi z = \pi z(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\left(1-\frac{z^2}{9}\right)\dots$$

en font partie. La factorisation des polynômes est surtout un sujet algébrique mais l'extension à des fonctions comme la fonction sinus ont une infinité de racines qui nécessitent la construction d'une théorie des produits infinis. En 1876, Weierstrass réussit à produire une théorie extensive des factorisations qui incluait les cas particuliers bien connus des produits infinis, ainsi que ceux des fonctions doublement périodiques.

La formule (30) fait bien plus que simplement montrer les racines de $1/\Gamma(z)$.

Elle montre immédiatement que l'inverse de la fonction gamma est une fonction beaucoup moins difficile à traiter que la fonction gamma elle-même. C'est une fonction entière, c'est-à-dire une de ces fonctions particulières qui ne possèdent aucune singularité quels que soient ses arguments finis. Weierstrass était si étonné par les avantages gagnés à commencer par $1/\Gamma(z)$ qu'il introduisit une notation spéciale pour elle. Il appela $1/\Gamma(u+1)$ la *factorielle* de u et la nota $Fc(u)$.

La théorie des fonctions d'une variable complexe unifie tout un fatras de courbes et un patchwork de méthodes. C'est dans cette théorie, avec ses études hautement développées des séries infinies de différents types, que furent effectuées les tentatives malheureuses de Stirling de résoudre le problème de l'interpolation pour les factorielles. Stirling réalisa un travail considérable sur les séries infinies de la forme

$$A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \dots.$$

Cette série est particulièrement utile pour s'adapter à des polynômes dont les valeurs sont données aux entiers $s = 0, 1, 2, \dots$. La méthode pour trouver les coefficients $A, B, C, \dots$ était bien connue. Mais quand une quantité infinie d'adaptation est nécessaire, il faut bien plus qu'un simple travail formel, car nous sommes alors face à une série infinie de bonne foi dont la convergence doit être analysée. En commençant par la série $1, 2, 6, 24, \dots$, Stirling trouva des polynômes d'interpolation à travers les séries ci-dessus. La série infinie résultante est divergente. Les factorielles grossissent trop vite. Stirling le réalisa et émit la suggestion que peut-être que si l'on commençait avec les logarithmes des factorielles au lieu des factorielles elles-mêmes, la taille serait suffisamment amoindrie pour qu'on puisse faire quelque-chose. Les choses en restèrent là jusqu'à 1900 lorsque Charles Hermite (1822-1901) écrivit la série de Stirling pour $\log \Gamma(1+z)$

$$(32) \qquad \log \Gamma(1+z) = \frac{z(z-1)}{1.2}\log 2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}(\log 3 - 2\log 2) + \dots$$

et montra que cette identité est valide à chaque fois que z est un nombre complexe de la forme $a + ib$ avec $a > 0$. L'identité elle-même aurait pu être réécrite par Stirling, mais trouver la preuve aurait été une autre histoire. Un point de départ bien plus simple est la fonction $\psi(z) = (d/dz) \log \Gamma(z)$, maintenant connue sous le nom de fonction digamma ou psi. Cela amène à la série de Stirling

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = -\gamma + (z-1) - \frac{(z-1)(z-2)}{2.2!} + \frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{3.3!} \ldots, \tag{33}$$

dont la convergence lorsque $a > 0$ fut démontrée en 1847 par M. A. Stern, un professeur de Riemann. Tous ces exemples sont maintenant des cas particuliers de la théorie extensive de la convergence des séries d'interpolation.

Les fonctions sont les blocs de construction de l'analyse mathématique. Aux XVIII$^{\text{ème}}$ et XIX$^{\text{ème}}$ siècles, les mathématiciens consacrèrent beaucoup de temps et de soin amoureux à développer les propriétés et les inter-relations entre les fonctions spéciales. Les puissances, les racines, les fonctions algébriques, les fonctions trigonométriques, les fonctions exponentielles, les fonctions logarithmiques, la fonction gamma, la fonction beta, la fonction hypergéométrique, les fonctions elliptiques, la fonction theta, les fonctions de Bessel, les fonctions de Mathieu, la fonction de Weber, celle de Struve, la fonction de Airy, les fonctions de Lamé, littéralement des centaines de fonctions spéciales furent isolées puis examinées minutieusement et leurs caractéristiques principales furent répertoriées. C'est un art qui n'est plus cultivé de nos jours. Les temps ont changé et l'accent s'est déplacé. Les mathématiciens préfèrent maintenant des éléments plus abstraits. De larges classes de fonctions sont étudiées plutôt que des fonctions individuelles. La sociologie a remplacé la biographie. Le domaine des fonctions spéciales, comme il est connu aujourd'hui, est plutôt grandement laissé à un petit mais ardent groupe d'enthousiastes, ainsi qu'à ceux qui travaillent en physique et ingénierie et qui se trouvent confrontés directement avec la nécessité de gérer de tels problèmes.

Le début des années 1950 vit la publication de quelques calculs très complets de la fonction gamma dans le plan complexe. Débutés en 1950 par une table à six places calculée en Angleterre, ils furent suivis en Russie par la publication d'une table très complète à 6 places. Ceci fut suivi en retour par la publication par le Bureau National des Standards de Washington d'une table à douze places. D'autres publications de la fonction gamma et des fonctions reliées sont apparues dans ce pays, en Angleterre, et au Japon. Dans le passé, les calculs principaux de la fonction gamma avaient été confinés dans les valeurs réelles. Deux jolies tables, l'une par Gauss en 1813 et l'autre par Legendre en 1825, ont semblé répondre aux besoins d'un siècle. La technologie moderne a aussi été rattrapée par la fonction gamma. Les tables des années 1800 avaient laborieusement été calculées à la main, et les récentes l'ont été par des ordinateurs électroniques digitaux.

Mais qu'est-ce qui stoppa cette recrudescence d'activité calculatoire ? Jusqu'aux travaux initiaux de H. T. Davis de l'Université d'Indiana dans le début des années 1930, les valeurs complexes de la fonction gamma avaient été peu étudiées. Ce fut donc un curieux tour que prennent parfois les événements lorsque la fonction gamma apparut dans la solution de plusieurs problèmes théoriques de physique nucléaire et atomique. Par exemple, les fonctions d'onde radiales pour les états d'énergie positive dans un champ de Coulomb amènent à une équation différentielle dont la solution fait intervenir la fonction de gamma complexe. La fonction de gamma complexe apparaît dans des formules de diffusion de particules chargées, dans les forces nucléaires entre protons, dans la formule d'approximation de Fermi pour la probabilité de la β-radiation, et en de nombreux autres endroits. L'importance de ces problèmes pour les physiciens a eu comme effet de bord que les mathématiques computationnelles rattrapent finalement deux siècles un quart de développement théorique.

Comme l'analyse se développait, à la fois du fait de la création de fonctions spéciales mais également de la délimitation de larges classes de fonctions, des classifications variées furent utilisées pour les organiser avec comme objectif de les étudier convenablement. Les premiers mathématiciens organisèrent les fonctions à partir de rien, de manière opérationnelle, en se demandant quelles opérations d'arithmétique ou de calcul devaient être effectuées pour les obtenir. Aujourd'hui, il y a une plus grande tendance à regarder les fonctions de l'intérieur, organiquement, en considérant leur construction comme achevée et en se demandant quelles caractéristiques géométriques elles possèdent. Dans la classification des premiers temps, nous avons au niveau le plus bas et le plus accessible des puissances, des racines, et tout ce qui peut être concocté à partir d'elles par la manipulation algébrique ordinaire. On les appelle les fonctions algébriques. Le calcul, avec son opération caractéristique de calcul de limites, introduisit les logarithmes et les exponentielles, ces derniers englobant, comme Euler le montra, les sinus et les cosinus de la trigonométrie qui avaient été utiles dans les périodes initiales de la découverte. Il y a un mur indépassable entre les fonctions algébriques et les nouvelles fonctions de calcul de limites. Ce mur consiste en le fait qu'on ne peut réussir en construisant une fonction trigonométrique quelle qu'elle soit car elle est définitivement hors du matériau fini de l'algèbre. En termes plus techniques, les fonctions algébriques sont fermées selon le processus algébrique et les fonctions trigonométriques sont définitivement en dehors de ce champ. (Au moyen d'une simple analogie : les entiers pairs sont fermés selon l'addition, la soustraction et la multiplication ; vous ne pouvez pas produire un nombre impair à partir de l'ensemble des nombres pairs en utilisant ces outils.). Cela amena au concept de fonctions transcendantes. Ce sont des fonctions qui ne sont pas algébriques. Les fonctions transcendantes comptent parmi leurs membres les fonctions trigonométriques, les fonctions logarithmiques, les fonctions exponentielles, les fonctions elliptiques, en bref, pratiquement toutes les fonctions spéciales qui ont été isolées pour des études particulières. Mais un tel flot de créations indiscriminées a produit une trop grande classe pour être traitée d'une seule manière. Les fonctions transcendantes doivent être séparées pour pouvoir être traitées pratiquement. Un outil majeur d'analyse est l'équation différentielle, qui exprime la relation entre une fonction et son niveau de croissance. On a trouvé que certaines fonctions, disons les fonctions trigonométriques, bien qu'elles soient transcendantes et ainsi ne satisfassent pas d'équation algébrique, ne satisfaisaient pas non plus d'équation différentielle dont les coefficients sont algébriques. Les solutions des équations différentielles algébriques forment une classe large de fonctions transcendantes même si cette classe ne les englobe pas toutes. Elle compte parmi ses membres de nombreuses fonctions spéciales qui interviennent en physique mathématique.

Où la fonction gamma se situe-t-elle là-dedans ? Ce n'est pas une fonction algébrique. Cela a été su tôt. C'est une fonction transcendante. Mais pendant longtemps, cela resta une question ouverte que de savoir si la fonction gamma satisfaisait une équation différentielle algébrique. Il fut répondu négativement à cette question en 1887 par O. Holder (1859-1937). La fonction gamma ne satisfait pas une telle équation. Elle est d'un ordre de transcendance plus élevé. C'est une fonction que l'on appelle transcendantalement transcendante, inatteignable par la résolution d'équations algébriques, et également inatteignable en résolvant des équations différentielles algébriques. Le sujet a intéressé de nombreuses personnes au cours des années et en 1925, Alexander Ostrowski, maintenant Professeur Émérite de l'Université de Bâle, en Suisse, a donné une preuve alternative au théorème de Holder.

Les problèmes de classification sont très difficiles à résoudre. Considérons, par exemple, les problèmes suivants : l'équation $x^7 + 8x + 1$ peut-elle être résolue par radicaux ? π est-il transcendant ? $\int dx/\sqrt{(x^3+1)}$ peut-elle être calculée au moyen de fonctions spécifiques élémentaires ? L'équation différentielle $dy/dx = (1/x) + (1/y)$ peut-elle être résolue au moyen de quadratures ? Les problèmes généraux, dont ceux-ci sont des représentants, sont même de nos jours loin d'être résolus et ce malgré des théories célèbres telles que la théorie de Galois, la théorie de Lie, la théorie des intégrales Abéliennes qui a découlé de telles questions simples. Tout problème individuel peut être résolu par des méthodes qui ne marchent que pour lui seul et qui nécessitent une incroyable sagacité.

HADAMARD'S FACTORIAL FUNCTION

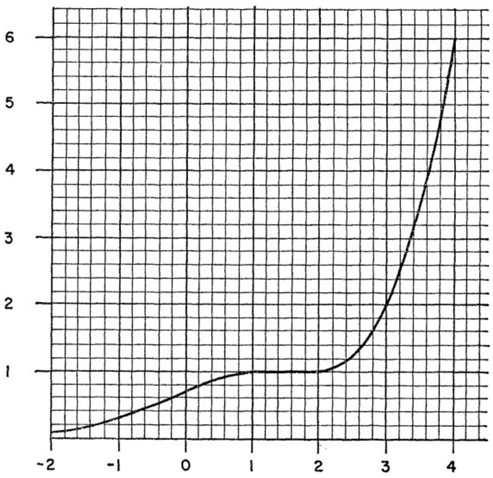

FIG. 4

Il y a une infinité de fonctions qui produisent des factorielles. La fonction

$$F(x) = (1/\Gamma(1-x))(d/dx)\log\{\Gamma((1-x)/2)/\Gamma(1-x/2)\}$$

est une fonction entière analytique qui coïncide avec la fonction gamma sur les entiers positifs. Elle satisfait l'équation fonctionnelle $F(x+1) = xF(x) + (1/\Gamma(1-x))$.

Retournons à nouveau à notre problème d'interpolation. Nous avons montré comment, pour parler strictement, il y a un nombre illimité de solutions à ce problème. Pour insister sur ce point, nous pourrions mentionner une curieuse solution donnée en 1894 par Jacques Hadamard (1865-[5]). Hadamard trouva une formule relativement simple impliquant la fonction gamma qui produit également des valeurs de factorielles aux entiers positifs (voir les figures 1 et 4.). Mais la fonction d'Hadamard

$$y = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \frac{d}{dx} \log\left[\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) / \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right], \tag{34}$$

contrairement à la fonction gamma elle-même ne possède de singularités nulle part dans le plan complexe fini. C'est une solution analytique entière du problème d'interpolation et par conséquent, du point de vue de la théorie des fonctions, elle constitue une solution plus simple. Au vu de toute cette ambiguité, pourquoi alors la solution d'Euler devrait-elle être considérée comme la solution par excellence ?

Du point de vue des intégrales, la réponse est claire. L'intégrale d'Euler apparaît partout et est inextriquablement liée à l'hôte de fonctions spéciales. Sa fréquence et sa simplicité la rendent fondamentale. Quand les puces sont en panne, c'est tout à fait la forme de l'intégrale et de ses modifications qui lui prêtent son utilité et son importance. Du point de vue de l'interpolation, nous ne pouvons prétendre à cela. Nous devons mieux regarder la fonction gamma et montrer qu'elle est la plus simple de toutes les solutions au problème de l'interpolation. C'est partiellement un problème d'esthétique mathématique.

[5] Hadamard est décédé en 1963.

A PSEUDOGAMMA FUNCTION

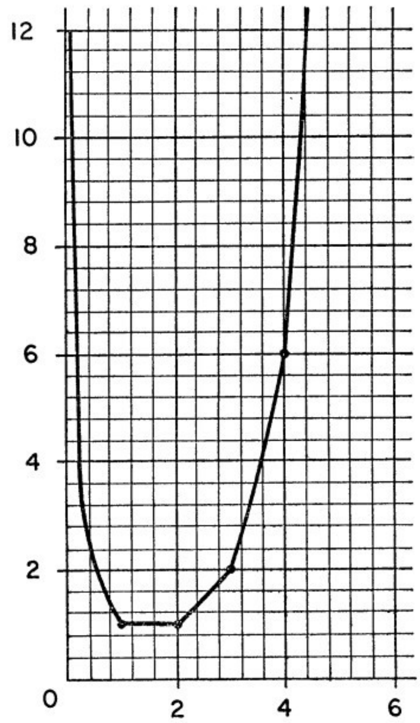

FIG. 5

La fonction illustrée produit des factorielles, satisfait l'équation fonctionnelle de la fonction gamma, et est convexe.

Nous avons déjà observé que l'intégrale d'Euler satisfait l'équation de récurrence fondamentale, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, et que cette équation nous permet de calculer toutes les valeurs réelles de la fonction gamma à partir simplement de la connaissance que l'on a de ces valeurs dans l'intervalle de 0 à 1. Puisque la solution au problème d'interpolation n'est pas déterminée de manière unique, cela a du sens d'ajouter au problème davantage de conditions et de se demander si le problème augmenté possède alors une solution unique. Si tel était le cas, nous espèrerions que cette solution coïncide avec celle d'Euler. La relation de récurrence est une condition naturelle à ajouter. Si nous l'ajoutons, nous trouvons que la fonction gamma n'est à nouveau pas la seule fonction qui satisfait cette relation de récurrence et qui produit des factorielles. On peut aisément construire une "pseudo" fonction gamma $\Gamma_S(x)$ en la définissant entre, disons, 1 et 2 de n'importe quelle façon (du moment qu'elle est telle que $\Gamma_S(1) = 1, \Gamma_S(2) = 1$), et en laissant la relation de récurrence étendre ses valeurs partout ailleurs.

Si, par exemple, nous posons $\Gamma_S(x)$ vaut 1 partout entre 1 et 2, la relation de récurrence nous amènera à la fonction (voir Fig. 5).

$$\begin{array}{ll} \Gamma_S(x) = 1/x & 0 < x \leqq 1; \\ \Gamma_S(x) = 1, & 1 \leqq x \leqq 2; \\ \Gamma_S(x) = x-1, & 2 \leqq x \leqq 3; \\ \Gamma_S(x) = (x-1)(x-2), & 3 \leqq x \leqq 4; \ldots. \end{array} \tag{35}$$

Nous pourrions terminer avec un résultat assez étrange, dépendant de celui par lequel nous avons commencé. Même si nous imposons que le résultat final soit une fonction analytique, il y a des moyens de le faire. Par exemple, prenons n'importe quelle fonction qui est à la fois analytique et à la fois périodique de période 1. Appelons-la $p(x)$. Soyons sûr que $p(1) = 1$. La fonction $1 + \sin 2\pi x$ pourra être $p(x)$. Maintenant, multiplions la fonction gamma ordinaire $\Gamma(x)$ par $p(x)$ et le résultat $\Gamma(x)p(x)$ sera une "pseudo" fonction gamma qui est analytique, qui satisfait la relation de récurrence, et qui produit des factorielles ! Par conséquent, nous n'avons toujours pas assez de conditions. Nous devons à nouveau augmenter le problème. Mais qu'ajouter ?

Vers le milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il fut reconnu que la fonction gamma d'Euler était la seule fonction continue qui satisfaisait simultanément la relation de récurrence, la formule de réflexion et la formule de multiplication. Weierstrass montra plus tard que la fonction gamma était la seule solution continue à la relation de récurrence pour laquelle $\{\Gamma(x+n)\}/\{(n-1)n^x\} \to 1$ pour tout x. Ces conditions ajoutées au problème d'interpolation serviraient à produire une solution unique et qui coïncide avec celle d'Euler. Mais elles semblaient trop lourdes et trop nombreuses comme les quart-arrières du lundi matin. C'est-à-dire que les conditions ajoutées étaient difficilement naturelles car elles étaient liées aux propriétés analytiques plus profondes de la fonction gamma. La recherche continua.

Les conditions esthétiques ne devaient pas être trouvées dans d'anciennes considérations analytiques, mais dans une approche plus nouvelle, interne, organique, de la théorie des fonctions qui fut développée au tournant du siècle. Sauvée par la théorie des ensembles de Cantor et la théorie émergente de la topologie, la nouvelle théorie des fonctions ne s'intéressait pas tant que ça aux équations et identités mais plutôt aux propriétés géométriques fondamentales. La condition souhaitée fut trouvée dans des notions de convexité. Une courbe est convexe si elle vérifie la chose suivante : prenez deux points de la courbe et joignez-les par un segment de droite ; alors, la portion de courbe entre les points reste sous la courbe. Une courbe convexe ne sinue pas ; elle ne peut ressembler à un dos de chameau. Au tournant du siècle, la convexité était dans l'air mathématique. On trouva qu'elle était intrinsèque à de nombreux phénomènes divers. Sur la durée d'une génération, elle fut recherchée, généralisée, abstraite, étudiée pour son propre intérêt, elle fut appliquée. Attirant l'attention sur elle via le travail de H. T. Brunn en 1887 et celui de H. Minkowski en 1903 sur les corps convexes et provoquant un intérêt indépendant en 1906 par le travail de J. L. W. V. Jensen, l'idée de convexité se propagea et s'établit elle-même dans la théorie des valeurs moyennes, la théorie du potentiel, la topologie, et plus récemment dans la théorie des jeux et la programmation linéaire. Au tournant du siècle donc, une application de la convexité à la fonction gamma aurait été naturelle et dans l'ordre des choses.

Les courbes individuelles qui constituent la fonction gamma sont toutes convexes. Un regard à la figure 2 montre que cela est vrai. Si, comme dans le paragraphe précédent, une fonction pseudo-gamma satisfaisant la formule de récurrence était produite en introduisant l'ondulation $1 + \sin 2\pi x$ comme facteur, ce ne serait plus vrai. Il a pu arriver à de nombreux mathématiciens de penser que la fonction gamma est la seule qui prend des valeurs de factorielles, satisfait la relation de récurrence, et est convexe par le dessous pour tout $x > 0$. Malheureusement, ça n'est pas vrai. La figure 5 montre une fonction pseudo-gamma qui possède justement ces propriétés. Il a fallu attendre 1922 pour découvrir une formulation correcte. Mais la solution n'était pas bien loin. La fonction gamma est non seulement convexe, mais elle est également logarithmiquement convexe. C'est-à-dire que le graphe de $\log \Gamma(x)$ est également convexe par en-dessous pour $x > 0$. Ce fait est implicite dans la formule (27). La convexité logarithmique est une condition plus forte que la convexité ordinaire car la convexité logarithmique implique, mais n'est pas impliquée par, la convexité ordinaire. Maintenant Harald Bohr et J. Mollerup ont été capables de démontrer le fait surprenant que la fonction gamma est la seule fonction qui satisfait la relation de récurrence et est logarithmiquement convexe. La preuve originale a été simplifiée quelques années plus tard par Emil Artin, maintenant professeur à l'Université de Princeton, et le théorème avec la méthode d'Artin constitue maintenant le théorème de Bohr-Mollerup-Artin. Sa formulation exacte est celle-ci :

La fonction gamma d'Euler est la seule fonction définie pour $x > 0$ qui est positive, qui vaut 1 en $x = 1$, qui satisfait l'équation fonctionnelle $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, et qui est logarithmiquement convexe.

Ce théorème est à la fois si surprenant et si satisfaisant que le synode d'abstraitistes qui écrivent les canons mathématiques sous le nom de plume de N. Bourbaki l'ont adopté comme point de départ de leur exposition de la fonction gamma. Preuve : une page ; découverte : 193 ans.

Nous en savons beaucoup plus sur la fonction gamma. Depuis l'époque d'Euler, plus de 400 articles majeurs la concernant ont été écrits. Mais quelques choses restent non encore connues et que nous aimerions savoir. Peut-être que le problème non résolu le plus difficile traite de questions de rationnalité et de transcendance. Considérons, par exemple, le nombre $\gamma = .57721\ldots$ qui apparaît dans la formule (30). C'est la constante d'Euler-Mascheroni. Beaucoup d'expressions peuvent l'égaler. Ainsi,

$$\gamma = -d\Gamma(x)/dx|_{z=1}, \tag{36}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n. \tag{37}$$

Bien que la valeur numérique de γ soit connue jusqu'à des centaines de décimales, on ne sait pas aujourd'hui (où cet article est écrit) si γ est ou n'est pas un nombre rationnel. Un autre problème de cette sorte traite des valeurs de la fonction gamma elle-même.

Bien que, assez curieusement, le produit $\Gamma(1/4)/\sqrt[4]{\pi}$ puisse être prouvé comme étant transcendant, on ne sait pas si $\Gamma(1/4)$ est rationnel.

George Gamow, le physicien renommé, cite Laplace qui a dit qu'au fur et à mesure que les zones de connaissance autour d'un sujet grandissent, le champ d'application du sujet en question grandit lui aussi. Laplace avait clairement en tête l'image d'un cercle s'étendant dans un plan infini. Gamow affrontait des problèmes de physique et avait en tête un cercle grandissant sur une surface sphérique. Comme le cercle grandit, la zone que le cercle délimite commence par grandir, mais ensuite elle se contracte. L'auteur de cet article est d'accord avec Gamow en ce qui concerne les mathématiques. Il faut ajouter ceci : chaque génération a trouvé quelque chose d'intéressant à dire à propos de la fonction gamma. Peut-être que la génération prochaine le fera aussi.

L'auteur souhaiterait remercier le Professeur C. Truesdell pour ses commentaires très utiles et critiques et le Dr. H. E. Salzer pour de nombreuses références utiles.

Bibliographie

1. E, Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1931.

2. N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Book IV, Ch. VII, La Fonction Gamma, Paris, 1951.

3. H. T. Davis, Tables of the Higher Mathematical Functions, vol. 1, Bloomington, Indiana, 1933.

4. L. Euler, Opera omnia, vol. $I_{14}, Leipzig - Berlin, 1924$.

5. P. H. Fuss, Ed., Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du $XVIII^{\text{ième}}$ Siècle, Tome I, St. Petersbourg, 1843.

6. G. H. Hardy, Divergent Series, Oxford, 1949, Ch. II.

7. F. Lösch et F. Schoblik, Die Fakultät und verwandte Funktionen, Leipzig, 1951.

8. N, Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

9. Table of the Gamma Function for Complex Arguments, National Bureau of Standards, Applied Math. Ser. 34, Washington, 1954, (Introduction D'Herbert E. Salzer.).

10. E. T. Whittaker et G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge, 1947, Ch. 12.