

Classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach

Pierre Cartier

1961

Introduction

Cet exposé est un résumé d'un long article de GROTHENDIECK [3] consacré aux produits tensoriels d'espaces de Banach. On a choisi ici le point de vue dual des formes bilinéaires qui nécessite moins de développements préliminaires; ceci a amené à modifier quelquefois la terminologie et les notations.

Les problèmes étudiés ont peu de rapport avec ceux dont traite la thèse de GROTHENDIECK [2], consacrée surtout aux espaces localement convexes les plus généraux. De même ils n'ont guère de rapport avec les travaux de SCHATTEN [4], qui s'intéresse avant tout aux opérateurs dans les espaces de Hilbert.

On a divisé cet exposé en deux parties : dans la première, on a fait l'étude des classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach; les démonstrations ne présentent en général, pas de difficulté, et nous n'en donnons aucune, imitant en cela GROTHENDIECK lui-même. Dans la deuxième partie se trouvent des résultats sur les formes bilinéaires définies dans certains espaces fonctionnels usuels. À notre avis, c'est dans cette deuxième partie que se trouvent les résultats nouveaux les plus susceptibles d'applications; aussi leurs démonstrations ont-elles été rendues indépendantes de la première partie.

1. Classes de formes bilinéaires

1.1. Notations

On prend pour scalaires les nombres réels.

On note $E, F, E_1, F_1, \dots$ des espaces de Banach (réels).

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires u de E dans F pour lesquelles il existe une constante $M > 0$ avec $\|u(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ pour tout x dans E ; la plus petite des constantes M qui conviennent est notée $\|u\|$; muni de cette norme, $L(E, F)$ est un espace de Banach. Lorsque $F = \mathbb{R}$ (corps des scalaires), l'espace de Banach $L(E, \mathbb{R})$ est le dual E^* de E . Une application linéaire $u \in L(E, F)$ est appelée un *morphisme* si $\|u\| \leq 1$, un *monomorphisme* si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans E , un *épimorphisme* si ...

Référence de l'article : https://www.numdam.org/book-part/SB_1960-1961__6__85_0/.

Transcription : Denise Vella-Chemla à l'aide de l'ia deepseek, septembre 2026.

1.2. Classes de formes bilinéaires

Cette définition axiomatise les propriétés des “applications ε -intégrales de norme ε -intégrale ≤ 1 ” de GROTHENDIECK.

Si α et β sont deux classes, on écrit $\alpha < \beta$ si toute forme de classe α est aussi de classe β .

Il y a une “plus grande” classe e ; une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est de classe e si l’on a $|A(x_1, x_2)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ quel que soit x_i dans E_i pour $i = 1, 2$; l’ensemble des formes bilinéaires de classe e sur $E_1 \times E_2$ est compact, et il en est par suite de même de l’ensemble des formes de classe α quelle que soit la classe α . Si M et N sont deux espaces compacts, μ une mesure positive de masse 1 sur M et ν une mesure positive de masse 1 sur N , les formes de classe e sur $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ sont définies par la formule $A(f, g) = \iint f(m)g(n)K(m, n) d\mu(m) d\nu(n)$ où K parcourt l’ensemble des fonctions mesurables sur $M \times N$ (pour la mesure produit de μ et ν) telles que $|K(m, n)| \leq 1$.

Il y a aussi une “plus petite” classe π ; les formes de classe π sur $E_1 \times E_2$ sont les limites de formes décomposées du type $\sum f_i(x_1)g_i(x_2)$ avec des $f_i \in E_1^*$ et $g_i \in E_2^*$ en nombre fini tels que $\sum \|f_i\| \cdot \|g_i\| \leq 1$. Si μ est une mesure positive de masse 1 sur un espace compact M , la forme bilinéaire $I_\mu(f, g) = \mu(fg)$ sur $C(M) \times C(M)$ est de classe π . Si la forme A sur $E_1 \times E_2$ est de classe π , il existe un espace compact M , une mesure positive μ de masse 1 sur M et des morphismes $u_1 : E_1 \rightarrow C(M)$ tels que $A = u_1 \cdot I_\mu \cdot u_2$. Si M et N sont deux espaces compacts, les formes de classe π sur $C(M) \times C(N)$ sont données par la formule $A(f, g) = \iint f(m)g(n) d\rho(m, n)$ où ρ parcourt l’ensemble des mesures de norme ≤ 1 sur $M \times N$.

1.3. Formes bilinéaires sur les espaces de Hilbert

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Les formes de classe e sur $H_1 \times H_2$ sont données par la formule $A(x_1, x_2) = (u(x_1)|x_2)$ avec un morphisme arbitraire u de H_1 dans H_2 ; la forme A est de classe π si et seulement si l’on a $|\text{Tr}(v \cdot u)| \leq 1$ pour tout morphisme de rang fini v de H_2 dans H_1 . Les formes de classe π sont aussi les formes qui admettent le développement en série :

$$A(x_1, x_2) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \cdot (e_n|x_1) \cdot (f_n|x_2)$$

avec une suite de nombres réels $\lambda_n \geq 0$ de somme ≤ 1 , et des suites orthonormales de vecteurs e_n dans H_1 et f_n dans H_2 (théorème de DIXMIER-SCHATTEN).

On étend les propriétés des formes bilinéaires sur les espaces de Hilbert aux espaces de Banach généraux, au moyen de deux nouvelles classes. Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, et A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$. On dit que A est de classe η s’il existe des espaces de Hilbert H_i et des morphismes $u_i : E_i \rightarrow H_i$ tels que A soit de la forme $u_1 \cdot B \cdot u_2$ pour une forme convenable B de classe e sur $H_1 \times H_2$. On peut caractériser de la manière suivante les formes de classe η . Introduisons l’espace de Banach F somme directe de E_1 et E_2 dont la norme est définie par $\|x_1 \oplus x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$; alors les formes de classe η sur $E_1 \times E_2$ sont les restrictions à $E_1 \times E_2$ des formes symétriques positives B sur $F \times F$ telles que $B(x, x) \leq \|x\|^2$.

On dira que A est de classe θ si pour tout couple de morphismes $u_i : H_i \rightarrow E_i$ (où les H_i sont de type $\mathcal{H}$), la forme $u_1 \cdot A \cdot u_2$ sur $H_1 \times H_2$ est de classe π . Il revient au même de supposer que l'on a $|\sum A(x_i, y_i)| \leq 1$ quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E_1 et les vecteurs $y_1, \dots, y_n$ de E_2 vérifiant les inégalités $\sum |f(x_i)|^2 \leq \|f\|^2$ et $\sum |g(y_i)|^2 \leq \|g\|^2$ (pour $f \in E_1^*$ et $g \in E_2^*$). Par exemple, si M et N sont deux espaces compacts, les formes de classe θ sur $C(M) \times C(N)$ sont les formes A telles que $|\sum A(f_i, g_i)| \leq 1$ quelles que soient les fonctions f_i sur M et g_i sur N avec $\sum |f_i|^2 \leq 1$ et $\sum |g_i|^2 \leq 1$.

On peut caractériser autrement les formes de classe θ . Une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est de classe θ si l'on peut trouver sur E_i (pour $i = 1, 2$) une forme bilinéaire positive B_i , limite de formes décomposées $\sum \lambda_k f_k(x) \cdot f_k(y)$ (avec $\sum \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geq 0$ et f_k dans E_i^* de norme ≤ 1), de sorte que l'on ait $|A(x, y)|^2 \leq B_1(x, x) \cdot B_2(y, y)$. On montre en effet facilement que les formes bilinéaires vérifiant le critère précédent forment une classe, et que si E_1 et E_2 sont de dimension finie, on obtient les formes de classe θ sur $E_1 \times E_2$.

1.4. Construction de classes de formes bilinéaires

Rappelons qu'un espace de Banach E est dit *métriquement accessible* si pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie M de E , il existe un morphisme u de rang fini de E dans E tel que $\|u(x) - x\| < \varepsilon$ pour $x \in M$. Les espaces de type C , ε ou $\mathcal{H}$ sont métriquement accessibles ; il est peu vraisemblable que tout espace de Banach ait cette propriété, mais on ne connaît pas de contre-exemple.

Soit α une classe de formes bilinéaires. On peut lui associer un certain ...

1.5. Tableau des principales classes

Le tableau suivant résume les relations connues entre les différentes classes ; un symbole $\alpha \rightarrow \beta$ signifie qu'il existe un nombre réel $h > 0$ tel que toute forme de classe α soit de la forme $h \cdot B$ où B est de classe β . Certaines des relations qui suivent sont des cryptographies pour les résultats de la deuxième partie.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \eta_{\mathcal{C}} & & \theta_{\mathcal{L}} & & \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
 \pi_{\mathcal{C}} = \pi & \rightarrow & \varepsilon_{\mathcal{C}} & \rightleftarrows & \theta & \rightarrow & \eta \rightleftarrows \pi_{\mathcal{L}} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{L}} \\
 & & " & & " & & \\
 & & \theta_{\mathcal{C}} & & \eta_{\mathcal{L}} & &
 \end{array}$$

Nous ajoutons un tableau donnant la correspondance entre nos notations et celles de GROTHENDIECK.

$$\begin{array}{cccccccc} \varepsilon & \pi & \eta & \theta & \alpha_{\mathcal{C}} & \alpha_{\mathcal{L}} & \pi_{\mathcal{L}} & \varepsilon_{\mathcal{C}} & \alpha \subset \beta \\ \vee & \wedge & \mathfrak{H} & \mathfrak{H}' & \backslash \alpha / & / \alpha \backslash & / \wedge \backslash & \backslash \vee / & \alpha \supset \beta \end{array}$$

2. Classes de fonctions de deux variables

2.1. Fonctions de type positif

Soit M un espace compact. Une fonction continue K sur $M \times M$ est dite de *type positif* si $K(x, y) = K(y, x)$ et si l'on a les inégalités :

$$\sum_{i,j} K(x_i, x_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0 \quad (1)$$

pour tous les systèmes finis de points x_i de M et de scalaires λ_i . On écrit $K \gg L$ pour exprimer que $K - L$ est de type positif.

Les fonctions de type positif interviennent en relation avec les espaces de Hilbert. Tout d'abord, si f est une application continue de M dans un espace de Hilbert H , et si l'on pose $K(x, y) = (f(x)|f(y))$ l'expression (1) est égale à $\|\sum_i f(x_i)\|^2$ donc est positive. Réciproquement, si K est de type positif, considérons l'espace vectoriel H formé des fonctions continues u sur M telles que $K(x, y) \cdot m^2 - u(x)u(y)$ soit de type positif pour une constante $m \geq 0$ convenable ; si l'on note $\|u\|$ la plus petite des constantes possibles, on définit une norme sur H , pour laquelle H devient un espace de Hilbert. Posons $K_x(y) = K(x, y)$; alors K_x est un élément de H , l'application $x \mapsto K_x$ de M dans H est continue, et l'on a $(K_x|K_y) = K(x, y)$.

Supposons la fonction de type positif K définie au moyen d'une application continue f de M dans un espace de Hilbert ; comme $f(M)$ est un sous-espace compact de H , il admet une suite dénombrable partout dense, et le sous-espace vectoriel fermé H_1 de H engendré par $f(M)$ admet une base orthonormale dénombrable $\{e_n\}$; si l'on pose $f_n(x) = (f(x)|e_n)$, on a $f(x) = \sum_n f_n(x) \cdot e_n$, d'où :

$$K(x, y) = \sum_n f_n(x) f_n(y) \quad (2)$$

(série uniformément convergente sur $M \times M$).

De la représentation (2), on déduit l'inégalité :

$$\iint K(x, y) u(x) u(y) d\mu(x) d\mu(y) \geq 0 \quad (3)$$

pour toute mesure μ sur M , et toute fonction u sommable pour $|\mu|$. On notera que (1) est le cas particulier de (3) correspondant à $u = 1$ et $\mu = \sum_i \lambda_i \delta_{x_i}$ (où l'on pose $\delta_x(f) = f(x)$). Réciproquement, si le support de μ est égal à M , et si une fonction continue K sur $M \times M$ vérifie la formule

(3) pour toute fonction continue u sur M , alors K est de type positif.

Choisissons maintenant une mesure μ positive sur M . On dira qu'une fonction K sommable sur $M \times M$ pour la mesure produit $\pi = \mu \otimes \mu$ est de type positif si l'on a l'inégalité (3) pour toute fonction continue u sur M ; la même inégalité est alors valable pour u mesurable et bornée. De plus, par des raisonnements analogues aux précédents, on déduit l'existence d'une décomposition $K(x, y) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) f_{\alpha}(y)$, qui converge pour la topologie faible induite par la dualité entre $L^1(\pi)$ et l'espace des fonctions continues sur $M \times M$ (noter que sur toute partie bornée de $L^{\infty}(\pi)$, cette topologie faible coïncide avec la topologie faible résultant de la dualité entre $L^{\infty}(\pi)$ et $L^1(\pi)$; nous considérons exclusivement cette topologie faible sur $L^1(\pi)$).

2.2. Fonctions de type intégral

On conserve l'espace compact M . On notera Γ l'ensemble des fonctions mesurables et bornées par 1 en module, qui sont limites faibles de fonctions de la forme $\sum |\lambda_i| f_i(x) \cdot f_i(y)$ où les scalaires λ_i vérifient $\sum |\lambda_i| \leq 1$ ($1 \leq i \leq n$) et où les fonctions mesurables f_i sont majorées par 1 en module. D'après le théorème des bipolaires, Γ n'est autre que l'ensemble des fonctions mesurables et bornées K sur $M \times M$ telles que $|\iint_{M \times M} K \cdot L d\pi| \leq 1$ pour toute fonction L dans $L^1(\pi)$ vérifiant $|\iint L(x, y) f(x) \cdot f(y) d\mu(x) d\mu(y)| \leq 1$ pour f mesurable et majorée en module par 1 sur M . En utilisant la compacité de la boule unité de $L^{\infty}(\mu)$ pour la topologie faible, et un théorème de GROTHENDIECK sur la représentation intégrale d'une application linéaire continue d'un espace L^1 dans un espace L^{∞} au moyen d'un noyau mesurable et borné, on obtient finalement la caractérisation suivante :

L'ensemble Γ se compose des fonctions de la forme

$$K(x, y) = \int_T L(x, t) L(y, t) d\nu(t) \quad (4)$$

où ν est une mesure de norme ≤ 1 sur un espace compact T , et où L est une fonction mesurable, pour la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $M \times T$, bornée par 1 en module.

Il résulte immédiatement de cette caractérisation que Γ est stable par multiplication. On dira qu'une fonction de type positif est *intégrale* si elle appartient à Γ .

Après ces préliminaires, on peut énoncer le résultat fondamental de GROTHENDIECK.

Théorème 1. *Soit μ une mesure positive sur l'espace compact M . Si la fonction K sur $M \times M$ est mesurable, bornée par 1 en module et de type positif, alors $\text{sh}(2) - 1$ K est intégrale.*

Démonstration. On a vu que K admet une représentation comme somme faiblement convergente $K(x, y) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) \cdot f_{\alpha}(y)$; comme Γ est faiblement fermé, on peut se ramener au cas où la série précédente a un nombre fini de termes; autrement dit, on peut supposer que l'on a $K(x, y) = (f(x)|f(y))$ où f est une application mesurable de M dans un espace de Hilbert H de dimension finie.

Soit S l'ensemble compact formé des vecteurs a de H de norme 1. Sur S , il existe une mesure ν positive de masse 1 invariante par le groupe des automorphismes unitaires de H , et une seule.

Notons $\sigma(x)$ le signe du nombre réel x , défini par $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$. Un calcul élémentaire donne alors l'identité :

$$\frac{2}{\pi} \text{Arc sin}(a|b) = \int_S \sigma(a|t) \sigma(b|t) d\nu(t) \quad (5)$$

en convenant que $\text{Arc sin } x$ est l'unique nombre réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus soit égal à x . La formule (5) prouve alors que la fonction

$$L(x, y) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin}(f(x)|f(y)) \quad (6)$$

est de type positif et intégrale. Mais en utilisant le développement en série bien connu du sinus, on trouve :

$$K(x, y) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k L(x, y)^{2k+1} / (2k+1)!$$

et, comme Γ est fermé, convexe et stable par multiplication, le théorème résulte immédiatement de là. $\square$

Remarque : on ne sait pas si toute fonction mesurable et bornée de type positif sur $M \times M$ est de la forme (4) avec une mesure ν positive sur T . On peut cependant prouver qu'elle est majorée (au sens de la relation d'ordre $\gg$) par une telle fonction. En effet, avec les notations de la démonstration précédente, on peut prouver l'inégalité $K \ll \frac{\pi}{2} L$. Pour démontrer cela, on se ramène d'abord facilement au cas où $M = S$ et $\mu = \nu$; soit E l'espace de Hilbert formé des fonctions de carré sommable sur S pour la mesure ν , et soit E_1 le sous-espace, isomorphe à H , formé des fonctions de la forme $x \mapsto (a|x)$ pour a parcourant H . Le projecteur orthogonal P de E sur E_1 est un opérateur intégral, admettant pour noyau la fonction $n \cdot (x|y)$, si l'on note n la dimension de H . Si l'on note A l'opérateur continu dans E ayant pour noyau la fonction mesurable $\sigma(x|y)$, notre assertion équivaut à dire que l'opérateur $\frac{\pi}{2} A^* A - P/n$ dans E est hermitien positif. Comme E est stable par A et A^* , et que ces opérateurs induisent dans E_1 des homothéties (cela résulte d'un argument facile de théorie des groupes), on voit facilement que notre assertion équivaut à l'inégalité

$$\frac{\pi}{2} |\text{Tr}(AP)|^2 \geq n;$$

or on a

$$\text{Tr}(AP) = n \iint |(x|y)| d\nu(x) d\nu(y) = n \int_S |(a|x)| d\nu(x)$$

et l'on achève la démonstration en calculant explicitement ces intégrales, ce qui ramène à une inégalité sur la fonction Γ d'Euler.

2.3. Formes bilinéaires sur les espaces de fonctions continues

Pour les fonctions continues de type positif, on peut donner une représentation au moyen d'une série analogue à (2), mais avec de meilleures propriétés de convergence.

Théorème 2. *Soit M un espace compact et soit $\varepsilon > 0$. Toute fonction K de type positif sur $M \times M$, continue et bornée par 1 en module, admet une représentation sous forme de série :*

$$K(x, y) = \sum_n \lambda_n f_n(x) \cdot f_n(y) \quad (7)$$

où les fonctions f_n , continues sur M , sont majorées par 1 en module, et où $\sum |\lambda_n| \leq \text{sh}(\pi/2) + \varepsilon$.

Démonstration. Soit C l'espace des fonctions continues sur M , muni de la norme usuelle $\|f\| = \sup |f(x)|$. Par ailleurs soit E l'ensemble des fonctions sur $M \times M$ qui sont "symétriques" et "décomposées", c'est-à-dire de la forme $h(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i f_i(x) \cdot f_i(y)$; on notera Δ le sous-ensemble de E formé des fonctions h telles que $\|f_i\| \leq 1$ et $\sum_i |\lambda_i| < 1$. Au moyen de la formule $\tilde{u}(h) = \sum_i \lambda_i u(f_i, f_i)$, on définit une correspondance bijective entre les formes linéaires $\tilde{u}$ sur E et les formes bilinéaires symétriques u sur $C \times C$; l'inégalité $|\tilde{u}(h)| \leq 1$ pour tout h dans Δ équivaut alors à $|u(f, f)| \leq \|f\|^2$ pour tout f dans C , ou encore à $|u(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$ pour f et g dans C (démonstration immédiate). Le théorème de Hahn-Banach montre alors que la relation $h \in m\Delta$ équivaut à $|\tilde{u}(h)| < m$ pour toute forme bilinéaire symétrique u sur $C \times C$ telle que $|u(f, f)| \leq \|f\|^2$ pour tout f dans C .

On sait qu'on peut représenter K sous la forme d'une série uniformément convergente

$$K(x, y) = \sum_i g_i(x) \cdot g_i(y) \quad (8)$$

et chaque somme partielle est majorée en module par 1 sur $M \times M$. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un nombre fini n de termes dans la série (8). Soit u une forme bilinéaire symétrique sur $C \times C$ telle que $|u(f, f)| \leq \|f\|^2$. On va prouver $\tilde{u}(K) < \text{sh}(\frac{\pi}{2}) + \varepsilon$. Comme les g_i sont continues et en nombre fini, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M tel que l'oscillation de chaque g_i dans chaque U_α soit $< \varepsilon/4n$. On choisira un point x_α dans chaque U_α et une partition continue de l'unité $\{\phi_\alpha\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Alors l'opérateur linéaire P dans C défini par $P(f) = \sum_{\alpha \in A} f(x_\alpha) \cdot \phi_\alpha$ vérifie $\|P(f)\| \leq \|f\|$ et $\|P(g_i) - g_i\| < \varepsilon/4n$, d'où

$$\left| \sum_i u(g_i, g_i) - \sum_i u(Pg_i, Pg_i) \right| < \varepsilon/2 \quad (9)$$

Par ailleurs, il existe une matrice symétrique $T = \|t_{\alpha\beta}\|$ telle que $u(Pf, Pg) = \sum_{\alpha\beta} f(x_\alpha) t_{\alpha\beta} g(x_\beta)$ et telle que $|t_{\nu\nu} T_{\nu\nu}| \leq 1$ pour tout vecteur $\nu = (\nu_\alpha)$ dont les composantes sont ≤ 1 en module. On a alors $\sum_i u(Pg_i, Pg_i) = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} \cdot K(x_\alpha, x_\beta)$. Mais la matrice $\|K(x_\alpha, x_\beta)\|$ est symétrique, positive et ses éléments sont majorés par 1 en module. En appliquant le théorème 1 à l'espace discret A , on voit qu'il existe un espace compact T avec une mesure ν positive de norme $\leq \text{sh}(\pi/2)$ et une fonction mesurable L sur $A \times T$ de module ≤ 1 telles que

$$K(x_\alpha, x_\beta) = \int_T L(\alpha, t) L(\beta, t) d\nu(t) \quad (10)$$

Un calcul facile montre alors qu'on a $|\sum_i u(Pg_i, Pg_i)| \leq \text{sh}(\pi/2)$ et finalement $\tilde{u}(K) < \text{sh}(\pi/2) + \varepsilon/2$.

On règle facilement le cas général. Comme la série (8) converge uniformément, on voit qu'on peut trouver une suite strictement croissante $\{i_k\}$ telle que ... $\square$

Corollaire 3. *Le corollaire s'étend facilement au cas des formes bilinéaires continues sur $C(M) \times C(N)$ où M et N sont deux espaces compacts; il suffit d'appliquer le corollaire à l'espace compact P comme topologique de M et N et à une forme bilinéaire symétrique sur $C(P) \times C(P)$ convenablement déduite de u .*

2.4. Conséquences diverses

Les théorèmes précédents permettent de prouver un certain nombre de résultats d'analyse fonctionnelle. Nous donnerons seulement quelques exemples.

A) Opérateurs linéaires. Soient H_1, H_2 des espaces de Hilbert, C_1, C_2 des espaces de type C et L_1, L_2 des espaces de type L . Rappelons qu'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ où E et F sont des espaces de Banach est dite *nucléaire* si elle se représente sous la forme $u(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x) \cdot e_n$ avec $f_n \in E^*$ et $e_n \in F$ tels que $\sum_{n \geq 0} \|e_n\| \|f_n\|$ soit fini.

Toute application composée :

$$C_1 \rightarrow L_1 \rightarrow C_2 \rightarrow L_2$$

$$H_1 \rightarrow C_1 \rightarrow L_1$$

$$C_1 \rightarrow L_1 \rightarrow H_1$$

est nucléaire. Toute application composée : $H_1 \rightarrow C_1 \rightarrow H_2$ ou $H_1 \rightarrow L_1 \rightarrow H_2$ est du type de Hilbert-Schmidt.

B) Intégration. Soit M un espace compact et C l'espace de Banach des fonctions continues sur M . Si u est une application linéaire de C dans un espace de Banach E de type $\mathcal{H}$ ou L , il existe une mesure positive μ sur M telle que u se prolonge par continuité en une application linéaire de $L^2(\mu)$ dans E .

Si μ est une mesure positive sur M et si u est une application linéaire continue d'un espace de Hilbert H à valeurs dans $L^1(\mu)$, il existe une fonction $f \in L^2(\mu)$ telle que u se factorise en une application linéaire continue de H dans $L^2(\mu)$ suivie de la multiplication par f (qui applique $L^2(\mu)$ dans $L^1(\mu)$).

3) Théorème de Littlewood. Si μ est une mesure positive sur un espace localement compact M , et si la série $\sum_n f_n$ des fonctions sommables est commutativement convergente dans $L^1(\mu)$, la somme des carrés des normes des f_n est sommable. En corollaire, si f est une fonction sur un groupe discret G et si le produit de f par toute fonction f^1 de carré égal à 1 est combinaison linéaire de fonctions de type positif, alors f est de carré sommable.

Références

- [1] Amemiya (I.), Shiga (K.). - On tensor products of Banach spaces, *Kodai math. Semin. Reports*, t. 9, 1957, p. 161-186.
- [2] Grothendieck (Alexander). - *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).
- [3] Grothendieck (Alexander). - Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, t. 8, 1956, p. 1-79.
- [4] Schatten (Robert). - *A theory of cross-spaces*. - Princeton, Princeton University Press, 1950 (Annals of Mathematics Studies, 26).