Ensemble de Cantor

En mathématiques, l'**ensemble de Cantor** (ou **ensemble triadique de Cantor**, ou **poussière de Cantor**), est un sous-ensemble remarquable de la droite réelle construit par le mathématicien allemand Georg Cantor[1].

Il s'agit d'un sous-ensemble fermé de l'intervalle unité $[0,\ 1]$, d'intérieur vide. Il sert d'exemple pour montrer qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables mais négligeables au sens de la mesure de Lebesgue. C'est aussi le premier exemple de fractale (bien que le terme ne soit apparu qu'un siècle plus tard), et il possède une dimension non entière.

Il admet enfin une interprétation sous l'angle du développement des réels en base 3. Pour cette raison, il est souvent noté K_3.

On le construit de manière itérative à partir du segment $[0,\ 1]$ en enlevant le tiers central ; puis on réitère l'opération sur les deux segments restants, et ainsi de suite. On peut voir les six premières itérations du procédé sur le schéma suivant :

Six premières itérations de la construction de l'ensemble de Cantor.

Sommaire

Construction

Construction itérative

On dénote par $\mathcal{T}$ l'opérateur « enlever le tiers central » :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}: & I & \to & I_0 \cup I_1 \\ & [a,b] & \mapsto & \left[a, a + \dfrac{b-a}{3}\right] \cup \left[b - \dfrac{b-a}{3}, b\right]. \end{array}$$

On note $A_0 = [0,1]$ et on définit par récurrence une suite de parties de $[0,\ 1]$ par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = \mathcal{T}(A_n).$$

On a :

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right];$$
$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right];$$

$$A_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Alors l'ensemble de Cantor K_3 est la « limite »[2] de A_n quand n tend vers $+\infty$:

$$K_3 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Écriture en base 3

On peut aussi définir[3] l'ensemble de Cantor via l'écriture en base 3. En effet tout réel $x \in [0,1]$ peut s'écrire :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n};$$

avec $x_n \in \{0,1,2\}$. On écrit alors

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots$$

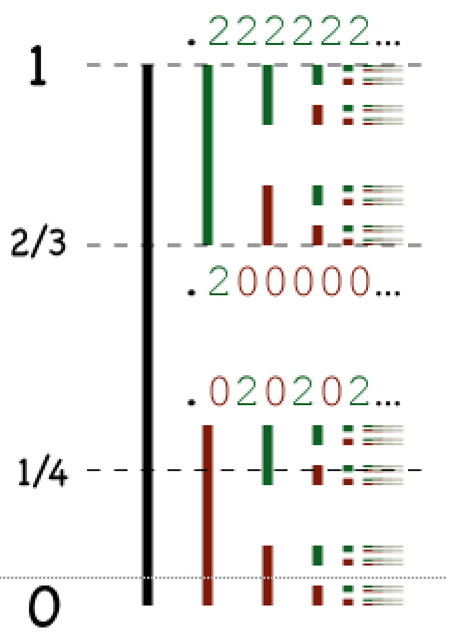
Cette écriture est unique à ceci près : on peut remplacer $1000000\ldots$ par $0222222\ldots$ (et $2000000\ldots$ par $1222222\ldots$) à la fin d'une écriture. Si on choisit de faire cette transformation on peut alors définir K_3 par :

> L'ensemble de Cantor est formé des réels de $[0,\ 1]$ ayant **une** écriture en base 3 ne contenant que des 0 et des 2.

Ou plus formellement :

$$K_3 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \;|\forall i \in \mathbb{N}^*, x_i \in \{0,2\} \right\}.$$

Par exemple le réel 1/3 est dans cet ensemble, puisqu'il admet les deux écritures 0,1000… et 0,02222… en base 3. Le réel 2/3 également (0,2000… ou 0,12222…). On peut remarquer que parmi les nombres admettant un développement propre et un développement impropre, il n'en existe aucun dont les deux écritures vérifient la propriété demandée.



Positions de 1/4, 2/3 et 1 dans l'ensemble de Cantor.

Propriétés

Mesure

L'ensemble de Cantor est de mesure nulle, c'est-à-dire négligeable au sens de la mesure de Lebesgue.

En effet en notant ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a :

- $\ell([0,1]) = 1$;
- pour une réunion A_n d'intervalles : $\ell(\mathcal{T}(A_n)) = \ell(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\ell(A_n)$;

où $\mathcal{T}$ est l'opérateur « ablation du tiers central » (voir premier paragraphe).

On en déduit que pour les étapes de la construction itérative ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Et comme l'ensemble de Cantor est inclus dans tous les A_n : $\ell(K) = 0$.

L'ensemble de Cantor est donc « petit » *au sens de la mesure de Lebesgue*.

Non-dénombrabilité

Cependant l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable. Plus précisément, il a la puissance du continu, c'est-à-dire qu'il est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (or $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, d'ailleurs équipotent à $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable, d'après le théorème de Cantor).

On peut en effet, grâce à l'écriture en base 3 ci-dessus, définir une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans K_3, en associant à toute partie A de $\mathbb{N}$ le réel $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \times 1_A(k)}{3^{k+1}}$, où 1_A désigne la fonction caractéristique de la partie A.

Ainsi l'ensemble de Cantor est « grand » *au sens de la théorie des ensembles*.

Propriétés topologiques

- L'ensemble de Cantor est compact, et n'a que des points d'accumulation (il est sans point isolé). On dit que c'est un ensemble parfait. Par ailleurs, il est d'intérieur vide,

> **Démonstration**
>
> Soit *P* un point de K_3, et soit une boule ouverte (intervalle ouvert) centrée en *P*. Cet ouvert contient nécessairement un réel dont le développement en base 3 contient le chiffre 1, qui n'est pas élément de K_3. Donc *P* n'est pas intérieur à K_3. Par ailleurs, dans ce même intervalle, il existe toujours un réel dont le développement en base 3 s'écrit uniquement avec des 0 ou des 2. Donc *P* n'est pas un point isolé.

- L'ensemble de Cantor est également totalement discontinu c'est-à-dire que chaque singleton est sa propre composante connexe.
- Il est homéomorphe à l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni de sa topologie produit.
- Un espace topologique X est homéomorphe à l'espace de Cantor si et seulement si X est un compact parfait possédant une base dénombrable d'ouverts-fermés.
- Tout espace métrique compact est l'image de l'ensemble de Cantor par une application continue[4]. Cette propriété a des répercussions importantes en analyse fonctionnelle. En outre, tout espace métrique compact totalement discontinu parfait est homéomorphe à l'ensemble de Cantor ; les sous-espaces du plan ou de l'espace usuel ayant cette propriété sont souvent appelés des **poussières de Cantor**.

Auto-similarité

L'image de l'ensemble de Cantor par l'homothétie *h* de centre *0* et de rapport *1/3* est elle-même une partie de l'ensemble de Cantor. Plus précisément

$$K_3 = h\left(K_3\right) \cup \left(h\left(K_3\right) + \frac{2}{3}\right).$$

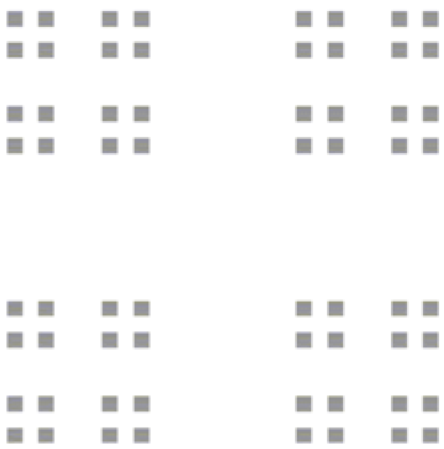
Ainsi, K_3 est la réunion disjointe de deux parties qui lui sont homothétiques. C'est une manifestation de ce qu'on appelle *l'auto-similarité*, qui est l'une des propriétés de base des fractales.

Dimension

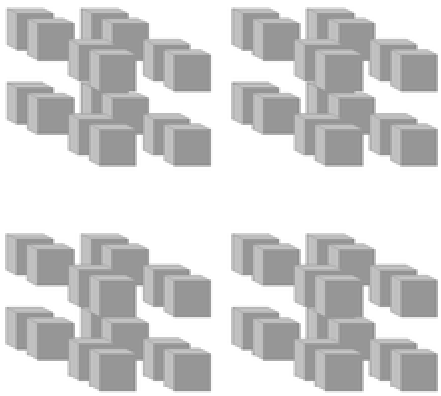
En conséquence de ce qui précède, on peut calculer la dimension de Minkowski ; elle vaut $\log_3(2) = \log_b(2)/\log_b(3) \approx 0{,}631$, où *b* est n'importe quelle base. C'est un nombre irrationnel et même transcendant. On parle parfois de dimension fractionnaire car elle n'est pas entière, même s'il ne s'agit pas davantage d'un nombre rationnel.

Cette valeur $\log_3(2)$ est également la dimension de Hausdorff de l'ensemble.

Variantes



Le carré de Cantor.



Le cube de Cantor.

Soit *s* un nombre strictement compris entre 0 et 1. Si, au lieu de couper chaque intervalle en trois et d'enlever l'intervalle central, on enlève à la *n*-ème étape un intervalle de longueur $s/3^n$ au centre de chaque intervalle de la génération précédente, on obtient un ensemble de Cantor dont la mesure de Lebesgue est 1 - *s*. Cela permet d'obtenir un compact d'intérieur vide de mesure aussi proche de 1 que l'on veut. Le cas *s* = 1 redonne l'ensemble de Cantor usuel. Un procédé comparable est utilisé dans l'ensemble de Smith-Volterra-Cantor.

Une autre version de l'ensemble de Cantor est le **carré de Cantor**. Il est construit sur le même principe général, mais basé sur un carré : on considère un carré que l'on découpe en 9 carrés de même taille, et on supprime tous les carrés n'étant pas dans un coin du carré de départ. L'ensemble est construit de façon itérative en répétant cette action sur les nouveaux carrés. Ce n'est rien d'autre que le produit cartésien $K_3 \times K_3$ d'un ensemble de Cantor par lui-même (à ne pas confondre avec le tapis de Sierpiński).

La même construction en dimension 3 conduit au **cube de Cantor**, égal au produit cartésien $K_3 \times K_3 \times K_3$ (à ne pas confondre avec l'éponge de Menger).

Notes et références

1. G. Cantor, « De la puissance des ensembles parfaits de points », *Acta Math.*, vol. 4, 1884, p. 381-392 (DOI 10.1007/BF02418423 (https://dx.doi.org/10.1007/BF02418423)).
2. Il s'agit d'ailleurs d'une véritable limite, pour la topologie de la distance de Hausdorff.
3. Cf. théorème 52 du mémoire de L3 de L. Iôôs et S. Peronno, « Autosimilarité, ensemble triadique de Cantor et dimension de Hausdorff » (http://blog.crdp-versailles.fr/peronno/public/projet-hausdorff.pdf), Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines, 2007.
4. **(en)** S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970, th. 30-7.

Voir aussi

Sur les autres projets Wikimedia :

Ensemble de Cantor (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cantor_sets?uselang=fr), sur Wikimedia Commons

Articles connexes

- Collier d'Antoine
- Ensemble de Smith-Volterra-Cantor
- Éponge de Menger
- Escalier de Cantor ou du diable
- Liste de fractales par dimension de Hausdorff

Bibliographie

- **(en)** Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer et James A. Yorke **(en)**, *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems*, New York, Springer, 1996, 603 p. (ISBN 0-387-94677-2, lire en ligne (https://books.google.com/books?id=i633SeDqq-oC&pg=PA150)), chap. 4.1 (« Cantor Sets »), p. 150-152 — Ce manuel d'introduction aux systèmes dynamiques est destiné aux étudiants du premier cycle et du début de deuxième cycle universitaire (p. ix).
- **(en)** Julian F. Fleron, « A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function », *Mathematics Magazine*, avril 1994 (lire en ligne (https://www.maa.org/sites/default/files/Fleron68910705.pdf))
- **(en)** George Pedrick, *A First Course in Analysis*, Springer, 1994, 279 p. (ISBN 0-387-94108-8, lire en ligne (https://books.google.com/books?id=kHOnHNz9XssC&pg=PA29)), p. 29, Exercise 6
- **(en)** Charles Chapman Pugh, *Real Mathematical Analysis*, New York, Springer, 2002, 437 p. (ISBN 0-387-95297-7, lire en ligne (https://books.google.com/books?id=R_ZetzxFHVwC&pg=PA95)), p. 95-98
- **(en)** Murray H. Protter et Charles B. Morrey, Jr., *A First Course in Real Analysis*, Springer, 1977, 507 p. (ISBN 978-1-4615-9992-0, lire en ligne (https://books.google.com/books?id=NgX3BwAAQBAJ&pg=PA494)), p. 494-495, Problem 3