

Produits eulériens et facteurs de type III

Jean-Benoît BOST et Alain CONNES

Résumé — Nous établissons un lien précis entre mécanique statistique quantique et théorie des nombres en construisant un système dynamique (\mathcal{H}, σ_t) où \mathcal{H} est une C^* -algèbre de Hecke non commutative, dont la fonction de partition est la fonction ζ de Riemann. Nous démontrons l'existence d'une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie, qui fait intervenir l'action du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}_{ab}/\mathbb{Q}$.

Euler products and type III factors

Abstract — We establish a precise relation between quantum statistical mechanics and number theory by the construction of a C^* dynamical system (\mathcal{H}, σ_t) where \mathcal{H} is a non-commutative Hecke C^* -algebra, whose partition function is the Riemann ζ function. We show the existence of a phase transition with spontaneous symmetry breaking which involves the action of the Galois group of $\bar{\mathbb{Q}}_{ab}/\mathbb{Q}$.

Soit S le foncteur de la catégorie des espaces de Hilbert dans elle-même qui associe à un espace de Hilbert \mathfrak{h} l'espace de Hilbert $S\mathfrak{h} = \bigoplus S^n \mathfrak{h}$ somme directe des puissances symétriques $S^n \mathfrak{h}$ dotées du produit scalaire tel que :

$$(1) \quad \langle \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n, \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \rangle = \sum_{\sigma} \prod_{j=1}^n \langle \xi_j, \eta_{\sigma(j)} \rangle$$

où σ parcourt le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Si T est un opérateur non borné autoadjoint dans \mathfrak{h} , ST est l'opérateur non borné autoadjoint tel que

$$(2) \quad (ST)(\xi_1 \dots \xi_n) = (T\xi_1) \dots (T\xi_n), \quad \forall \xi_j \in \text{Domaine } T.$$

Si T est traçable et de norme < 1 , alors ST est traçable et l'on a

$$(3) \quad \text{Trace}(ST) = \det(1 - T)^{-1}.$$

Pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$ on définit un opérateur $b^*(\xi)$ dans $S\mathfrak{h}$ comme la fermeture de l'opérateur de multiplication par ξ :

$$(4) \quad b^*(\xi)\eta = \xi\eta, \quad \forall \eta \in S^n \mathfrak{h}.$$

Ces opérateurs et leurs adjoints $b(\xi) = (b^*(\xi))^*$ vérifient les relations de commutation canoniques [5] :

$$(5) \quad [b^*(\xi), b(\eta)] = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{h}.$$

En particulier pour \mathfrak{h} de dimension 1 les opérateurs b^* et b correspondants dans $S\mathfrak{h}$ donnent l'unique représentation irréductible de la relation $bb^* - b^*b = 1$. L'opérateur bb^* admet alors $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$ comme spectre simple et cette écriture caractérise les opérateurs autoadjoints admettant \mathbb{N}^* comme spectre simple.

Le lemme suivant caractérise les opérateurs autoadjoints admettant pour spectre simple le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_+$ formé des nombres premiers. C'est une traduction immédiate du théorème de factorisation d'Euclide.

LEMME 1. — Soit T un opérateur autoadjoint dans \mathfrak{h} . Pour que T admette \mathcal{P} comme spectre simple, il faut et il suffit que ST admette \mathbb{N}^* comme spectre simple.

L'égalité (3) appliquée à T^{-s} , $\text{Re}(s) > 1$, correspond évidemment à la décomposition de la fonction ζ de Riemann en produit eulérien. Le foncteur S et les relations de commutation canoniques (5) sont les ingrédients essentiels de la deuxième quantification

Note présentée par Alain CONNES.

des physiciens théoriciens. Ainsi le lemme 1 suggère de remplacer l'étude du sous-ensemble \mathcal{P} de \mathbb{R} par celle du système dynamique non commutatif constitué par

(a) l'algèbre (des observables) engendrée par les opérateurs $b(\xi)$, $b^*(\eta)$; $\xi, \eta \in l^2(\mathcal{P})$ dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}^*) = S l^2(\mathcal{P})$,

(b) l'évolution σ_t de cette algèbre définie par :

$$(6) \quad \sigma_t(x) = e^{itH_b} x e^{-itH_b}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où l'« hamiltonien » H_b est l'opérateur

$$(7) \quad H_b \varepsilon_n = (\log n) \varepsilon_n$$

dans la base orthonormale canonique ε_n de $l^2(\mathbb{N}^*)$. La définition précise de la C^* -algèbre des observables, formée d'opérateurs bornés dans $\mathfrak{h}_b = l^2(\mathbb{N}^*)$, ainsi que sa structure sont contenues dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2. — 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité suivante définit une isométrie μ_n de $l^2(\mathbb{N}^*)$ dans $l^2(\mathbb{N}^*)$:

$$\mu_n \varepsilon_k = \varepsilon_{kn}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

2. La C^* -algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les opérateurs μ_n , $n \in \mathbb{N}^*$ est le produit tensoriel infini : $C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$ des C^* -algèbres τ_p engendrées par μ_p , $p \in \mathcal{P}$.

3. Chaque C^* -algèbre τ_p est isomorphe à la C^* -algèbre de Toeplitz.

4. L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH_b} x e^{-itH_b}$, $x \in C^*(\mathbb{N}^*)$ définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$.

Les C^* -algèbres de Toeplitz sont nucléaires, de sorte que la définition du produit tensoriel $\bigotimes \tau_p$ est non ambiguë. Pour un tel système dynamique non commutatif, une notion essentielle, issue de la mécanique statistique quantique est la suivante (cf. [4], chap. 1).

DÉFINITION 3. — Soient (B, σ_t) une C^* -algèbre unifère munie d'un groupe à un paramètre d'automorphismes, φ un état sur B et $\beta \in]0, \infty[$. On dit que φ vérifie la condition KMS_β relativement à σ_t si, et seulement si, il existe pour tous $x, y \in B$ une fonction holomorphe $F_{x,y}$ bornée continue au bord dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \in [0, \beta]\}$ telle que $F_{x,y}(t) = \varphi(x \sigma_t(y))$ et $F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y) x)$.

On n'a, en général, ni existence ni unicité d'états KMS_β .

THÉORÈME 4. — (a) Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS_β sur $C^*(\mathbb{N}^*)$; c'est un produit tensoriel infini $\varphi_\beta = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \varphi_{\beta,p}$, où $\varphi_{\beta,p}$ est l'état sur l'algèbre de Toeplitz dont la liste des valeurs propres est $\{(1 - p^{-\beta}) p^{-n\beta}, n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Pour $\beta > 1$, l'état φ_β est de type I_∞ et donné par

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1} \text{Trace}(e^{-\beta H_b} x), \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) Pour $\beta = 1$, l'état φ_β est factoriel de type III_1 et donné par :

$$\varphi_1(x) = \text{Trace}_\omega(e^{-H_b} x), \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_ω est la trace de Dixmier.

(d) Pour $0 < \beta \leq 1$, l'état φ_β est factoriel de type III_1 et le facteur associé est le facteur d'Araki-Woods R_∞ .

Blackadar [3] avait démontré que φ_1 est factoriel de type III.

Rappelons de plus que la trace de Dixmier d'un opérateur comme $e^{-H} x$ est égale au résidu en $s=1$, si celui-ci a un sens, de la fonction $s \rightarrow \text{Trace}(e^{-sH} x)$ ([1], chap. 5). Nous

interprétons maintenant la C^* -algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ en termes adéliques. Soit P le groupe algébrique des matrices triangulaires de la forme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix}$, h inversible. Considérons l'anneau localement compact commutatif A_f des adèles finies sur \mathbb{Q} . Notons R le sous-anneau compact maximal, il est ouvert dans A_f . La proposition suivante identifie $C^*(\mathbb{N}^*)$ à la C^* -algèbre de convolution des fonctions P_R -biinvariantes sur P_{A_f} . Rappelons que si G est un groupe localement compact moyennable, la C^* -algèbre du groupe $C^*(G)$ est la C^* -algèbre engendrée dans l'espace de Hilbert $L^2(G, ds)$ de la représentation régulière gauche (ds est une mesure de Haar à gauche sur G) de G par l'action de $L^1(G)$ par convolution :

$$(8) \quad (\lambda(f)\xi)(s) = \int_G f(t)\xi(t^{-1}s) dt.$$

Soit ds la mesure de Haar à gauche sur P_{A_f} normalisée par :

$$(9) \quad \int_{P_R} ds = 1.$$

PROPOSITION 5. — 1. Soient $p \in \mathcal{P}$, $K = \mathbb{Q}_p$, $R = \mathbb{Z}_p$. La fonction caractéristique $1_{P_R} = e$ de l'ouvert $P_R \subset P_K$ définit un idempotent $e \in C^*(P_K)$ et la C^* -algèbre réduite $C^*(P_K)_e$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Toeplitz τ_p .

2. La C^* -algèbre $C^*(P_{A_f})$ est le produit tensoriel infini $\otimes_{p \in \mathcal{P}} (C^*(P_{\mathbb{Q}_p}), e_p)$.

3. La fonction caractéristique $1_{P_R} = e$ de l'ouvert $P_R \subset P_{A_f}$ définit un idempotent $e \in C^*(P_{A_f})$ et la C^* -algèbre réduite $C^*(P_{A_f})_e$ est canoniquement isomorphe à $C^*(\mathbb{N}^*)$.

La notion de produit tensoriel infini de couples (B_v, e_v) de C^* -algèbres sans unité et idempotents $e_v = e_v^* \in B_v$ se définit comme limite inductive en utilisant les morphismes $x \rightarrow x \otimes e_v$. L'idéal bilatère J engendré par l'idempotent $e \in C^*(P_{A_f})$ n'est pas dense dans $C^*(P_{A_f})$ et les C^* -algèbres considérées ne sont pas équivalentes au sens de Morita. Rappelons qu'un poids φ sur une C^* -algèbre B est une application linéaire de $B^+ = \{x \in B; x \geq 0\}$ dans $[0, +\infty]$. Un poids est dit *semi-fini* si, et seulement si, $\{x \in B; \varphi(x^*x) < \infty\}$ est dense (en norme) dans B et semi-continu inférieurement (s.c.i.) s'il l'est pour la topologie normique sur B^+ .

Si G est un groupe localement compact, on construit un poids canonique φ sur $C^*(G)$, semi-fini et s.c.i. tel que $\varphi(f) = \int f(e)$ pour $f \in L^1(G)$ suffisamment régulière. C'est le poids de Plancherel. Quand G n'est pas unimodulaire, ce poids n'est pas une trace. Soit alors Δ le module de G :

$$(10) \quad d(t^{-1}) = \Delta(t)^{-1} dt, \quad d(ts) = \Delta(s) dt.$$

Le poids de Plancherel φ vérifie la condition KMS_1 relativement au groupe à un paramètre $\sigma_t \in \text{Aut}(C^*(G))$ tel que :

$$(11) \quad \sigma_t(f)(s) = f(s)\Delta(s)^{it}, \quad \forall s \in G, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les groupes P_K , $K = \mathbb{Q}_p$ et P_{A_f} ne sont pas unimodulaires et le module Δ est donné par l'égalité :

$$(12) \quad \Delta\left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) = |h|.$$

L'idempotent $e \in C^*(P_{A_f})$ (prop. 5) est invariant par le groupe σ_t d'automorphismes modulaires du poids de Plancherel et la restriction de σ_t à l'algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*) \simeq C^*(P_{A_f})_e$ est identique au groupe d'évolution de la proposition 2.4.

THÉORÈME 6. — 1. Pour tout $\beta > 0$ il existe (à normalisation près) un unique poids semi-fini s.c.i. et KMS_β sur le système dynamique $(C^*(P_{A_f}), \sigma_t)$.

2. Pour $\beta = 1$, φ_β est le poids de Plancherel. Le poids φ_β est factoriel de type III_1 pour $\beta \in]0, 1]$ et le facteur associé est le facteur d'Araki-Woods R_∞ [1].

3. La C^* -algèbre $C^*(P_{A_f})$ est canoniquement isomorphe au produit croisé de $C_0(A_f)$ par l'action par homothéties du groupe A_f^* et pour $\beta > 1$, le poids φ_β est le poids dual de la mesure μ_β :

$$\mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{A_f^*} |j|^\beta f(j) d^*j$$

où d^*j désigne la mesure de Haar sur A_f^* . Ce poids φ_β est factoriel de type I_∞ ($\beta > 1$).

L'isomorphisme $C^*(P_{A_f}) = C_0(A_f) \rtimes A_f^*$ dépend du choix de l'isomorphisme de Fourier entre A_f et le groupe dual. Pour $f \in C_0(A_f)$ suffisamment régulière la fonction $\beta \rightarrow \mu_\beta(f)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} ([8], [9]) et l'égalité $\hat{\mu}_\beta = \varphi_\beta$ persiste pour $0 < \beta < 1$.

Étudions maintenant la relation entre les C^* -algèbres $C^*(P_{A_f}) = B$ et $C^*(\mathbb{N}^*) = B_e$ grâce au bimodule B_e des fonctions sur P_{A_f}/P_R . Rappelons quelques généralités sur les C^* -modules et les représentations associées. Étant donnée une C^* -algèbre C et un module à droite \mathcal{E} sur C , muni d'une application sesquilinéaire $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow C$, notée $\langle \xi, \eta \rangle$; $\xi, \eta \in \mathcal{E}$, on dit que \mathcal{E} est un C^* -module sur C si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(\alpha) \quad \langle \xi a, \eta b \rangle = a^* \langle \xi, \eta \rangle b, \quad \forall a, b \in C; \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}$$

$$(\beta) \quad \langle \xi, \xi \rangle \in C^+, \quad \forall \xi \in \mathcal{E}$$

$$(\gamma) \quad \mathcal{E} \text{ est complet pour la norme } \xi \rightarrow \|\langle \xi, \xi \rangle\|^{1/2}.$$

On note $\text{End}_C(\mathcal{E})$ la C^* -algèbre des endomorphismes de \mathcal{E} .

LEMME 7. — Soient C une C^* -algèbre unifère, \mathcal{E} un C^* -module sur C , $\sigma_t \in \text{Aut}(C)$ un groupe à un paramètre d'automorphismes, φ_β un état KMS_β sur C , et $\mathfrak{h}_{\varphi_\beta}$ l'espace de Hilbert de la représentation GNS de C associée à φ_β .

(a) Soit \mathfrak{h}_β la complétion de \mathcal{E} pour le produit scalaire : $\langle \xi, \eta \rangle = \varphi_\beta(\langle \xi, \eta \rangle)$, $\forall \xi, \eta \in \mathcal{E}$. Alors l'action de $\text{End}_C(\mathcal{E})$ dans \mathcal{E} se prolonge par continuité à \mathfrak{h}_β .

(b) Il existe une unique représentation unitaire de C^0 dans \mathfrak{h}_β telle que $\rho(a)\xi = \xi\sigma_{-i\beta/2}(a)$, $\forall \xi \in \mathcal{E}$, $a \in C$.

La démonstration résulte de l'identification de \mathfrak{h}_β avec le produit tensoriel de C^* modules $\mathcal{E} \otimes_C \mathfrak{h}_{\varphi_\beta}$.

Considérons alors le C^* module sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ obtenu en munissant B_e du produit scalaire $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in e B_e = C^*(\mathbb{N}^*)$, $B = C^*(P_{A_f})$. Pour $\beta \in]0, \infty[$, soit φ_β l'unique état KMS_β sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et \mathfrak{h}_β l'espace de Hilbert associé par le lemme 7 au couple $(\mathcal{E}, \varphi_\beta)$. Le lemme 7 (a) montre que la C^* -algèbre $C^*(P_A)$ et donc le groupe P_A sont représentés unitairement dans \mathfrak{h}_β .

Par construction \mathcal{E} est un espace de fonctions sur l'espace homogène $\Delta = P_{A_f}/P_R$. Pour toute place finie p le quotient $T_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$ est l'arbre de $\text{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ avec un bout privilégié et Δ est le produit restreint de ces arbres. L'action de P_A sur Δ préserve cette structure.

Le sous-groupe $P_{\mathbb{Q}} \subset P_{\mathbb{A}}$ agit transitivement sur Δ que l'on identifie ainsi à $P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit $\varepsilon_{\alpha} \in \mathcal{E}$ la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$.

LEMME 8. — Soit $\beta \in]0, +\infty[$. Les vecteurs ε_{α} , $\alpha \in \Delta$, sont totaux dans l'espace de Hilbert \mathfrak{h}_{β} . On a $\|\varepsilon_{\alpha}\| = 1$ et le produit scalaire $\langle \varepsilon_{\alpha'}, \varepsilon_{\alpha} \rangle$ est déterminé par la fonction de type positif $\Psi_{\beta}(g) = \langle g \varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha} \rangle_{\beta}$, $g \in P_{\mathbb{Q}}$, donnée par :

$$(\alpha) \Psi_{\beta}(g) = 0 \text{ si } g \notin N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; n \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$(\beta) \Psi_{\beta} \left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \prod p^{-k_p \beta} (1 - p^{\beta-1}) (1 - p^{-1})^{-1}$$

où $b = \prod p^{k_p}$ est la décomposition en facteurs premiers du dénominateur de la fraction irréductible $n = a/b$.

Pour $\beta = 1$ les vecteurs ε_x , $x \in \Delta$, forment une base orthonormale de \mathfrak{h}_{β} , de sorte que $\mathfrak{h}_1 = l^2(\Delta)$. En général, la décomposition $\Delta = \cup \Delta_k$, $k \in \mathbb{Q}_+^*$ de Δ en orbites de

$$N : \Delta_k = N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \varepsilon_1$$

donne une décomposition de \mathfrak{h}_{β} en sous espaces $\mathfrak{h}_{\beta, k}$ deux à deux orthogonaux.

Nous déterminons le commutant de $P_{\mathbb{Q}}$ dans \mathfrak{h}_{β} grâce à la C^* -algèbre « de Hecke » suivante. Les orbites de l'action de $P_{\mathbb{Z}}$ à gauche dans $\Delta = P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}$ sont finies, leur longueur définit une fonction $\alpha \rightarrow l(\alpha)$ de Δ dans \mathbb{N}^* . L'algèbre involutive \mathcal{H}_f des fonctions $P_{\mathbb{Z}}$ biinvariantes sur $P_{\mathbb{Q}}$, à support fini dans $P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}$ est définie par :

$$(a) (f_1 * f_2)(g) = \sum_{P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1} g)$$

$$(b) f^*(g) = \bar{f}(g^{-1}).$$

L'algèbre \mathcal{H}_f contient comme sous-algèbre commutative l'algèbre de Hecke des fonctions $PSL(2, \mathbb{Z})$ -biinvariantes sur $PGL^+(2, \mathbb{Q})$, car $PGL^+(2, \mathbb{Q})$ agit transitivement sur Δ qui s'identifie à $PGL^+(2, \mathbb{Q})/PSL(2, \mathbb{Z})$.

Pour toute double classe $\gamma \in P_{\mathbb{Z}} \backslash P_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Z}}$, soient $\delta(\gamma) = l(\gamma)/l(\gamma^{-1})$ et $e_{\gamma} \in \mathcal{H}_f$ la fonction caractéristique de $\{\gamma\}$.

PROPOSITION 9. — Soit $\beta \in]0, +\infty[$.

1. L'égalité suivante définit une représentation unitaire ρ_{β} de l'algèbre opposée \mathcal{H}_f^o dans \mathfrak{h}_{β} :

$$\rho_{\beta}(e_{\gamma}) \varepsilon_{\alpha} = \delta(\gamma)^{\beta/2} \sum_{\alpha' \in \alpha \cdot \gamma} \varepsilon_{\alpha'}$$

2. $\rho_{\beta}(\mathcal{H}_f^o)$ engendre le commutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}$ dans \mathfrak{h}_{β} .

3. La norme de $\rho_{\beta}(x)$, $x \in \mathcal{H}_f$ est indépendante de β et définit par complétion une C^* -algèbre \mathcal{H} à laquelle ρ_{β} se prolonge.

4. Le vecteur ε_1 est séparateur pour $\rho_{\beta}(\mathcal{H})''$ et définit un état $\varphi_{\beta}(x) = \langle \rho_{\beta}(x) \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle$ sur \mathcal{H} qui est KMS_{β} relativement au groupe d'automorphismes $\sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{H})$, $\sigma_t(e_{\gamma}) = \delta(\gamma)^{it} e_{\gamma}$.

Le sous espace cyclique $\mathfrak{h}_{\beta}^{(1)} = \overline{\rho_{\beta}(\mathcal{H}) \varepsilon_1}$ est l'espace des vecteurs fixes pour le sous groupe $\mathbb{Z} \subset N \subset P_{\mathbb{Q}}$.

Comme $P_{\mathbb{Q}}$ commute avec $\rho_{\beta}(\mathcal{H})$, l'action de \mathbb{Q}^* dans $\mathcal{L}(\mathfrak{h}_{\beta})$ par automorphismes intérieurs laisse $\rho_{\beta}(\mathcal{H})$ invariant point par point, de sorte que l'extension de cette action à $A_f^* \subset P_{A_f}$ définit par passage au quotient une action par automorphismes $\theta_j \in \text{Aut}(\mathcal{H})$, indépendante de β , du groupe compact $C = A_f^*/\mathbb{Q}^*$ des classes d'idèles finies. L'action de C sur \mathcal{H} commute avec l'action σ_t de \mathbb{R} . La C^* -algèbre $\mathcal{H}^C = \{x \in \mathcal{H}; \theta_j(x) = x, \forall j \in C\}$

des points fixes de C est canoniquement isomorphe à la C^* -algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$. La C^* -algèbre $\mathcal{H}^{\mathbb{R}} = \{x \in \mathcal{H}; \sigma_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$ est canoniquement isomorphe à la C^* -algèbre $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ du groupe discret \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Le théorème suivant, qui est le résultat principal de cette Note, montre l'existence d'une transition de phase pour $\beta = 1$, avec brisure spontanée de symétrie, pour le système dynamique non commutatif (\mathcal{H}, σ_t) .

THÉORÈME 10. — (a) Pour $0 < \beta \leq 1$, il existe un unique état KMS_β sur \mathcal{H} (pour l'évolution σ_t); cet état est factoriel de type III_1 , invariant par C et sa restriction à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est la fonction de type positif Ψ_β .

(b) Pour $\beta > 1$, les états KMS_β sur \mathcal{H} et extrémaux sont de type I et paramétrés par les caractères injectifs $\chi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$; la restriction de $\varphi_{\beta, \chi}$ à $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est donnée par l'égalité :

$$\varphi_{\beta, \chi}(e_\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n.$$

L'action du groupe compact C sur l'ensemble des états extrémaux pour $\beta > 1$ est non triviale et c'est l'action naturelle du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de \mathbb{Q} . Pour $\beta = 1$, la représentation de $P_{\mathbb{Q}}$ dans \mathfrak{h}_1 est la représentation induite de la représentation triviale de $P_{\mathbb{Z}}$. Qu'elle soit factorielle et de type III a été démontré indépendamment par Binder ([2]).

COROLLAIRE 11. — Pour $\beta \in]0, 1]$ la représentation de $P_{\mathbb{Q}}$ dans \mathfrak{h}_β est factorielle de type III_1 . Elle est réductible et de type I_∞ pour $\beta > 1$.

Bien que l'étude ci-dessus soit limitée à l'aspect « théorie de la mesure » du système dynamique non commutatif (\mathcal{H}, σ_t) , l'opérateur H_b admet une racine carrée supersymétrique D ([6], [7]) qui permet de définir sur \mathcal{H} un module θ -sommable et d'en définir la géométrie non commutative [4]. Dans une Note ultérieure, nous étudierons cette géométrie ainsi que l'analogie des résultats ci-dessus pour un corps global arbitraire.

Note remise le 6 avril 1992, acceptée le 9 avril 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] H. ARAKI et E. J. WOODS, A classification of factors, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, 4, 1968, p. 51-130.
- [2] M. BINDER, Induced factor representations of discrete groups and their type, *J. Funct. Anal.* (à paraître).
- [3] B. E. BLACKADAR, The regular representation of restricted direct product groups, *J. Funct. Anal.*, 25, 1977, p. 267-274.
- [4] A. CONNES, *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris, 1990.
- [5] P. A. M. DIRAC, The quantum theory of the emission and absorption of radiation, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 114, 1927, p. 243-265.
- [6] B. JULIA, Statistical theory of numbers, in *Number Theory and Physics, Les Houches Winter School*, J.-M. LUCK, P. MOUSSA et M. WALDSCHMIDT éd., Springer-Verlag, 1990.
- [7] D. SPECTOR, Supersymmetry and the Möbius inversion function, *Comm. Math. Phys.*, 127, 1990, p. 239-252.
- [8] J. TATE, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function, in *Algebraic Number Theory*, J. W. S. CASSELS et A. FRÖHLICH éd., Academic-Press, 1967.
- [9] A. WEIL, Fonction zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, n° 312, juin 1966.