§ 4. Spectres d'anneaux et supports de modules

1. *Espaces irréductibles.*

Définition 1. — *On dit qu'un espace topologique* X *est irréductible si toute intersection finie d'ensembles ouverts non vides de* X *est non vide.*

En considérant la famille vide d'ensembles ouverts de X, on voit qu'un espace irréductible est *non vide* ; pour qu'un espace topologique X soit irréductible, il faut et il suffit qu'il soit non vide et que l'intersection de deux ensembles ouverts non vides de X soit toujours non vide (ou, ce qui revient au même, que la réunion de deux ensembles fermés distincts de X soit toujours distincte de X).

Proposition 1. — *Soit* X *un espace topologique non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est irréductible ;*

b) *tout ensemble ouvert non vide de* X *est dense dans* X *;*

c) *tout ensemble ouvert de* X *est connexe.*

Par définition, un ensemble dense dans X est un ensemble qui rencontre tout ensemble ouvert non vide, donc *a*) et *b*) sont équivalentes. Il est immédiat que *c*) entraîne *a*), car si U_1 et U_2 sont des ensembles ouverts non vides disjoints, $U_1 \cup U_2$ est un ensemble ouvert non connexe. Montrons enfin que *a*) entraîne *c*) : si U est un ensemble ouvert non connexe, il est réunion de deux ensembles non vides disjoints U′, U″ qui sont ouverts dans U, donc aussi ouverts dans X, ce qui implique que X n'est pas irréductible.

Un espace *séparé* n'est irréductible que s'il est réduit à un seul point.

On dit qu'une partie E d'un espace topologique X est un *ensemble irréductible* si le sous-espace E de X est irréductible. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout couple d'ensembles U, V ouverts dans X et rencontrant E, $U \cap V$ rencontre aussi E, ou (ce qui revient au même) que, pour tout couple d'ensembles F, G fermés dans X et tels que $E \subset F \cup G$, on ait $E \subset F$ ou $E \subset G$. Par récurrence sur n, on en déduit que, si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie d'ensembles fermés dans X, tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, il existe un indice i tel que $E \subset F_i$.

Proposition 2. — *Dans un espace topologique* X, *pour qu'un ensemble* E *soit irréductible, il faut et il suffit que son adhérence* $\overline{E}$ *le soit.*

En effet, pour qu'un ensemble ouvert de X rencontre E, il faut et il suffit qu'il rencontre $\overline{E}$, et la proposition résulte des remarques précédentes.

Proposition 3. — (i) *Si* X *est un espace irréductible, tout ensemble ouvert non vide de* X *est irréductible.*

(ii) *Soit* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *un recouvrement non vide d'un espace topologique* X, *formé d'ensembles ouverts tels que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *pour tout couple d'indices* (α, β). *Si les ensembles* U_α *sont irréductibles, l'espace* X *est irréductible.*

(i) Si X est irréductible, $U \subset X$ ouvert non vide dans X et $V \subset U$ ouvert non vide dans U, V est aussi ouvert dans X, donc dense dans X et *a fortiori* dans U. Donc U est irréductible (prop. 1).

(ii) Montrons que, pour tout ensemble V ouvert dans X et non vide, on a $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \in A$: il en résultera que $V \cap U_\alpha$ est dense dans U_α par hypothèse, donc que V est dense dans X, et cela prouvera que X est irréductible (prop. 1). Or il existe au moins un indice γ tel que $V \cap U_\gamma \neq \emptyset$; comme $U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$ pour tout α, et que $V \cap U_\gamma$ est dense dans U_γ, on a $U_\alpha \cap U_\gamma \cap V \neq \emptyset$ et *a fortiori* $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Proposition 4. — *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques,* f *une application continue de* X *dans* Y. *Pour toute partie irréductible* E *de* X, $f(E)$ *est une partie irréductible de* Y.

En effet, si U, V sont deux ensembles ouverts dans Y rencontrant $f(E)$, $\overset{-1}{f}(U)$ et $\overset{-1}{f}(V)$ sont des ensembles ouverts dans X rencontrant E. Par suite $\overset{-1}{f}(\mathrm{U}) \cap \overset{-1}{f}(\mathrm{V}) = \overset{-1}{f}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ rencontre E, ce qui entraîne que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ rencontre $f(\mathrm{E})$ et démontre la proposition.

Définition 2. — *On appelle composante irréductible d'un espace topologique* X *toute partie irréductible maximale de* X.

Il résulte de la prop. 2 que toute composante irréductible de X est *fermée* dans X.

Proposition 5. — *Soit* X *un espace topologique. Toute partie irréductible de* X *est contenue dans une composante irréductible de* X, *et* X *est réunion de ses composantes irréductibles.*

Pour démontrer la première assertion, il suffit, en vertu du th. de Zorn, de prouver que l'ensemble $\mathfrak{I}$ des parties irréductibles de X est *inductif*. Soit $\mathfrak{G}$ une partie de $\mathfrak{I}$ totalement ordonnée par inclusion ; montrons que la réunion E des ensembles $\mathrm{F} \in \mathfrak{G}$ est irréductible. Soient U, V deux ensembles ouverts dans X et rencontrant E ; comme $\mathfrak{G}$ est totalement ordonnée, il existe un ensemble $\mathrm{F} \in \mathfrak{G}$ rencontrant U et V ; comme F est irréductible, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ rencontre F, donc aussi E, ce qui prouve que E est irréductible, donc que $\mathfrak{I}$ est inductif. La seconde assertion résulte de la première, car toute partie de X réduite à un seul point est irréductible.

Corollaire. — *Toute composante connexe d'un espace topologique* X *est réunion de composantes irréductibles de* X.

En effet, tout sous-espace irréductible de X est connexe en vertu de la prop. 1, donc contenu dans une composante connexe de X.

On notera que deux composantes irréductibles distinctes de X peuvent avoir des points communs (exerc. 11).

Proposition 6. — *Soient* X *un espace topologique,* $(\mathrm{P}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un recouvrement fini de* X *formé d'ensembles fermés irréductibles. Alors les composantes irréductibles de* X *sont les éléments maximaux (pour la relation d'inclusion) de l'ensemble des* P_i.

On peut se borner au cas où les P_i sont deux à deux incomparables. Si E est une partie irréductible de X, on a $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, donc E est contenu dans l'un des ensembles fermés P_i ; cela prouve que les P_i sont les seules parties irréductibles maximales de X.

COROLLAIRE. — *Soient* X *un espace topologique,* E *un sous-espace de* X *n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles distinctes* Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; *alors les composantes irréductibles de l'adhérence* $\overline{E}$ *dans* X *sont les adhérences* $\overline{Q_i}$ *des* Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *et on a* $\overline{Q_i} \neq \overline{Q_j}$ *pour* $i \neq j$.

En effet, $\overline{E}$ est la réunion des $\overline{Q_i}$, qui sont irréductibles (prop. 2) ; comme Q_i est fermé dans E, on a $\overline{Q_i} \cap E = Q_i$; comme $Q_i \not\subset Q_j$ pour $i \neq j$, on a $\overline{Q_i} \not\subset \overline{Q_j}$, d'où le corollaire, en vertu de la prop. 6.

Remarque. — Supposons que X n'ait qu'un nombre *fini* de composantes irréductibles distinctes X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; alors $U_i = \complement\left(\bigcup_{j \neq i} X_j\right)$ est *ouvert dans* X et *dense dans* X_i puisque $X_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} X_j$; les U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont donc des ouverts non vides de X, irréductibles (prop. 2), deux à deux disjoints, et dont la réunion est dense dans X.

PROPOSITION 7. — *Soit* U *une partie ouverte d'un espace topologique* X. *L'application* $V \rightarrow \overline{V}$ (*adhérence dans* X) *est une bijection de l'ensemble des parties irréductibles de* U, *fermées dans* U, *sur l'ensemble des parties irréductibles de* X, *fermées dans* X *et rencontrant* U ; *la bijection réciproque est* $Z \rightarrow Z \cap U$. *En particulier, cette bijection applique l'ensemble des composantes irréductibles de* U *sur l'ensemble des composantes irréductibles de* X *rencontrant* U.

En effet, si V est fermée dans U et irréductible, $\overline{V}$ est irréductible (prop. 2) et l'on a $V = \overline{V} \cap U$. Inversement, si Z est irréductible, fermé dans X et rencontre U, $Z \cap U$ est un ouvert non vide dans Z, donc est irréductible (prop. 3), dense dans Z, et, comme Z est fermé, on a $Z = \overline{Z \cap U}$. Cela démontre la proposition.

2. *Espaces topologiques nœthériens*

Définition 3. — *On dit qu'un espace topologique* X *est nœthérien si tout ensemble non vide de parties fermées de* X, *ordonné par inclusion, possède un élément minimal.*

Il revient au même de dire que tout ensemble non vide de parties ouvertes de X, ordonné par inclusion, possède un élément maximal, ou que toute suite décroissante (resp. croissante) d'ensembles fermés (resp. ouverts) est stationnaire (*Ens.*, chap. III, § 6, n° 5, prop. 6).

Proposition 8. — (i) *Tout sous-espace d'un espace nœthérien est nœthérien.*

(ii) *Soit* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *un recouvrement* fini *d'un espace topologique* X. *Si les sous-espaces* A_ι *de* X *sont nœthériens*, X *est nœthérien.*

(i) Soient X un espace nœthérien, A un sous-espace de X, (F_n) une suite décroissante de parties de A, fermées *dans* A ; on a donc $F_n = \overline{F}_n \cap A$, et les adhérences $\overline{F}_n$ des F_n dans X forment une suite décroissante de parties fermées de X. Comme cette suite est stationnaire, il en est de même de la suite (F_n).

(ii) Soit $(G_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de parties fermées de X ; par hypothèse, chacune des suites $(G_n \cap A_\iota)_{n \geqslant 0}$ est stationnaire. Comme I est fini, il y a un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $G_n \cap A_\iota = G_{n_0} \cap A_\iota$ pour tout $\iota \in I$. Mais $G_n = \bigcup_{\iota \in I} (G_n \cap A_\iota)$, donc la suite (G_n) est stationnaire, et X est nœthérien.

Proposition 9. — *Pour qu'un espace topologique* X *soit nœthérien, il faut et il suffit que tout ensemble ouvert dans* X *soit quasi-compact.*

Pour démontrer que la condition est nécessaire, il suffit, en vertu de la prop. 8, de prouver que tout espace nœthérien X est quasi-compact. Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X ; l'ensemble des réunions finies d'ensembles U_ι est non vide et admet donc un élément maximal $V = \bigcup_{\iota \in H} U_\iota$, où H est une partie finie de I. Par définition, on a $V \cup U_\iota = V$ pour tout $\iota \in I$, donc $V = X$.

Réciproquement, supposons que tout ensemble ouvert dans X soit quasi-compact, et soit (U_n) une suite croissante de parties ouvertes de X. La réunion V des U_n est ouverte, donc quasi-compacte ; comme (U_n) est un recouvrement ouvert de V, il y a une sous-famille finie de (U_n) qui est un recouvrement de V, donc $V = U_n$ pour un indice n, ce qui prouve que la suite (U_n) est stationnaire.

Lemme 1 (« principe de récurrence nœthérienne »). — ***Soient*** E *un ensemble ordonné dont toute partie non vide admet un élément minimal. Soit* F *une partie de* E *ayant la propriété suivante : si* $a \in E$ *est tel que la relation* $x < a$ *entraîne* $x \in F$, *alors* $a \in F$. *On a alors* $F = E$.

En effet, supposons $F \neq E$; alors $\complement F$ aurait un élément minimal b. Par définition, on a $x \in F$ pour tout $x < b$, ce qui entraîne $b \in F$, d'où contradiction.

Proposition 10. — *Si* X *est un espace nœthérien, l'ensemble des composantes irréductibles de* X (*et a fortiori l'ensemble des composantes connexes de* X) *est fini.*

Il suffit de prouver que X est réunion finie de parties fermées irréductibles (n° 1, prop. 6). Montrons qu'on peut appliquer le principe de récurrence nœthérienne en prenant pour E l'ensemble des parties fermées de X, ordonné par inclusion, pour F l'ensemble des réunions finies de parties fermées irréductibles. Soit Y une partie fermée de X telle que toute partie fermée $\neq$ Y de Y appartienne à F. Si Y est irréductible, on a $Y \in F$ par définition ; sinon, Y est réunion de deux parties fermées Y_1, Y_2 distinctes de Y. On a donc $Y_1 \in F$ et $Y_2 \in F$ par hypothèse, d'où $Y \in F$ par définition de F.

Il en résulte en particulier qu'un espace nœthérien *séparé* est nécessairement *fini.*

3. Le spectre premier d'un anneau

Soient A un anneau, X l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour toute partie M de A, nous noterons V(M) l'ensemble des idéaux premiers de A contenant M ; il est clair que, si $\mathfrak{a}$ est l'idéal de A engendré par M, on a $V(M) = V(\mathfrak{a})$; si M est réduit à un seul élément f, on écrira $V(f)$ au lieu de $V(\{f\})$, et on a $V(f) = V(Af)$. L'application $M \to V(M)$ est *décroissante* pour les relations d'inclusion dans A et X. En outre, on a les formules suivantes :

(1) $$V(0) = X, \qquad V(1) = \emptyset ;$$

(2) $$V\Big(\bigcup_{\iota \in I} M_\iota\Big) = V(\sum_{\iota \in I} M_\iota) = \bigcap_{\iota \in I} V(M_\iota)$$

pour toute famille $(M_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de A ;

(3) $$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}')$$

pour tout couple d'idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ de A. En effet, les formules (1) et (2) sont évidentes ; d'autre part, la formule (3) signifie que, pour qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contienne l'un des idéaux $\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{a}'$, il faut et il suffit qu'il contienne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, ou qu'il contienne $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$; elle résulte par suite du § 1, n° 1, prop. 1. La seconde formule (1) admet la réciproque suivante : si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A tel que $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$, alors $\mathfrak{a} = A$, car il n'existe aucun idéal maximal de A contenant $\mathfrak{a}$. Enfin, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A et $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ sa *racine* (§ 2, n° 6, déf. 4), on a

(4) $$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$$

comme il résulte du § 2, n° 6, cor. 1 de la prop. 13.

Les formules (1) à (3) montrent que les parties V(M) de X satisfont aux axiomes des *ensembles fermés* d'une topologie (*Top, gén.*, chap. I, 3e éd., § 1, n° 4).

DÉFINITION 4. — *Soit* A *un anneau. On appelle spectre premier de* A *et on note* Spec (A) *l'ensemble* X *des idéaux premiers de* A, *muni de la topologie pour laquelle les ensembles fermés sont les ensembles* V(M) *où* M *parcourt* $\mathfrak{P}(A)$. *La topologie ainsi définie s'appelle topologie spectrale ou topologie de Zariski sur* X.

Il est clair que la relation $\operatorname{Spec}(A) = \emptyset$ est équivalente à $A = \{0\}$.

Soit X le spectre premier d'un anneau A; pour tout $f \in A$, notons X_f l'ensemble des idéaux premiers de A *ne contenant pas* f ;

on a $X_f = X - V(f)$, et X_f est donc un ensemble *ouvert*. En vertu de (2), toute partie fermée de X est intersection d'ensembles fermés de la forme $V(f)$, donc les X_f forment une *base* de la topologie spectrale sur X. En outre, il résulte aussitôt des définitions que l'on a

$$X_0 = \emptyset, \qquad X_1 = X, \tag{5}$$

et plus généralement $X_f = X$ pour tout élément inversible f de A ;

$$X_{fg} = X_f \cap X_g \text{ pour } f,\ g \text{ dans A.} \tag{6}$$

Pour toute partie Y de X, notons $\mathfrak{J}(Y)$ l'intersection des idéaux premiers de A qui appartiennent à Y. Il est clair que $\mathfrak{J}(Y)$ est un idéal de A, et que l'application $Y \to \mathfrak{J}(Y)$ est *décroissante* pour les relations d'inclusion dans X et dans A. On a évidemment les relations

$$\mathfrak{J}(\emptyset) = A \tag{7}$$

$$\mathfrak{J}\Big(\bigcup_{\lambda \in L} Y_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda \in L} \mathfrak{J}(Y_\lambda) \tag{8}$$

pour toute famille $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ de parties de X. En outre :

Proposition 11. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A, Y *une partie de* $X = \operatorname{Spec}(A)$.

(i) $V(\mathfrak{a})$ *est fermé dans* X *et* $\mathfrak{J}(Y)$ *est un idéal de* A *égal à sa racine.*

(ii) $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{a}))$ *est la racine de* $\mathfrak{a}$, *et* $V(\mathfrak{J}(Y))$ *est l'adhérence de* Y *dans* X.

(iii) *Les applications* $\mathfrak{J}$ *et* V *définissent des bijections décroissantes réciproques l'une de l'autre, entre l'ensemble des parties fermées de* X *et l'ensemble des idéaux de* A *égaux à leurs racines.*

L'assertion (i) et la première assertion de (ii) résultent des définitions et du § 2, n° 6, cor. 1 de la prop. 13. Si un ensemble fermé $V(M)$ (pour un $M \subset A$) contient Y, on a $M \subset \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in Y$, d'où $M \subset \mathfrak{J}(Y)$ et par suite $V(M) \supset V(\mathfrak{J}(Y))$; comme on a $Y \subset V(\mathfrak{J}(Y))$, $V(\mathfrak{J}(Y))$ est le plus petit ensemble fermé de X contenant Y, ce qui achève de prouver (ii). Enfin, il résulte de (ii) que, si $\mathfrak{a}$ est un idéal égal à sa racine, on a $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ et que, si Y est fermé dans X, $V(\mathfrak{J}(Y)) = Y$; ce qui démontre (iii).

On déduit aussitôt de la prop. 11 que, si M est une partie quelconque de A et Y une partie quelconque de X, on a $V(M) = V(\mathfrak{I}(V(M)))$ et $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{I}(Y)))$.

Corollaire 1. — *Pour toute famille* $(Y_\lambda)_{\lambda\in L}$ *de parties fermées de* X, $\mathfrak{I}\left(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\right)$ *est la racine de la somme des idéaux* $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$.

En effet, il résulte de la prop. 11, (iii), que $\mathfrak{I}\left(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\right)$ est le plus petit idéal égal à sa racine et contenant tous les $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$; cet idéal contient donc $\sum_{\lambda\in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$ et par suite aussi la racine de $\sum_{\lambda\in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$ (§ 2, n° 6, cor. 2 de la prop. 13), d'où le corollaire.

Corollaire 2. — *Désignons par* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *la racine d'un idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A ; *si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux idéaux de* A, *la relation* $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ *est équivalente à* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *et à* $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

Il est immédiat que les relations $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ sont équivalentes, et comme $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$, le corollaire résulte aussitôt de la prop. 11 ,(iii).

Corollaire 3. — *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille d'éléments de* A. *Pour qu'un élément* $g \in A$ *soit tel que* $X_g \subset \bigcup_{\lambda\in L} X_{f_\lambda}$, *il faut et il suffit qu'il existe un entier* $n > 0$ *tel que* g^n *appartienne à l'idéal engendré par les* f_λ.

En effet, la relation $X_g \subset \bigcup_{\lambda\in L} X_{f_\lambda}$ équivaut à $V(g) \supset \bigcap_{\lambda\in L} V(f_\lambda)$, et il suffit d'appliquer le cor. 2.

Corollaire 4. — *Pour que deux éléments* f, g *de* A *soient tels que* $X_f = X_g$, *il faut et il suffit qu'il existe deux entiers* $m > 0$, $n > 0$ *tels que* $f^m \in Ag$ *et* $g^n \in Af$.

Corollaire 5. — *Pour que* $f \in A$ *soit tel que* $X_f = \varnothing$, *il faut et il suffit que* f *soit nilpotent.*

Cela résulte aussitôt du cor. 4.

COROLLAIRE 6. — *L'adhérence d'un ensemble réduit à un point* $\mathfrak{p} \in X = \mathrm{Spec}(A)$ *est l'ensemble* $V(\mathfrak{p})$ *des idéaux premiers contenant* $\mathfrak{p}$. *Pour que l'ensemble* $\{\mathfrak{p}\}$ *soit fermé dans* X (ou, comme on dit encore par abus de langage, pour que $\mathfrak{p}$ soit un *point fermé* de X), *il faut et il suffit que* $\mathfrak{p}$ *soit maximal.*

COROLLAIRE 7. — *Si* A *est un anneau nœthérien,* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est un espace nœthérien.*

PROPOSITION 12. — *Pour tout* $f \in A$, *l'ensemble ouvert* X_f *dans* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *est quasi-compact ; en particulier, l'espace* X *est quasi-compact.*

Comme les X_g forment une base de la topologie, il suffit de prouver que, si $(g_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille d'éléments de A telle que $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{g_\lambda}$, alors il existe une sous-famille finie $(g_\lambda)_{\lambda \in H}$ telle que $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in H} X_{g_\lambda}$. Mais la relation $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{g_\lambda}$ signifie qu'il existe un entier $n > 0$ et une sous-famille finie $(g_\lambda)_{\lambda \in H}$ telle que f^n appartienne à l'idéal engendré par cette sous-famille (cor. 3 de la prop. 11) ; d'où la proposition.

PROPOSITION 13. — *Soient* A, A' *deux anneaux,* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, *h un homomorphisme de* A *dans* A' ; *l'application* ${}^a h : \mathfrak{p}' \to \overset{-1}{h}(\mathfrak{p}')$ *de* X' *dans* X *est continue.*

En effet, pour $M \subset A$, l'ensemble $({}^a h)^{-1}(V(M))$ est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}'$ de A' tels que $M \subset \overset{-1}{h}(\mathfrak{p}')$, ce qui équivaut à $h(M) \subset \mathfrak{p}'$; cet ensemble est donc égal à $V(h(M))$ et est par conséquent fermé.

On dit que ${}^a h$ est l'application *associée* à l'homomorphisme *h*.

Remarque. — Si *h* est surjective et si $\mathfrak{a}$ est son noyau, il résulte de la définition de la topologie spectrale que ${}^a h$ est un homéomorphisme de X' sur le sous-espace fermé $V(\mathfrak{a})$ de X ; en effet, pour qu'un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' contienne un idéal $\mathfrak{b}'$ de A', il faut et il suffit que $\overset{-1}{h}(\mathfrak{p}')$ contienne $\overset{-1}{h}(\mathfrak{b}')$; on voit d'abord que ${}^a h$ est injective en prenant $\mathfrak{b}'$ premier ; en outre, pour tout idéal $\mathfrak{b}'$ de A', l'image par ${}^a h$ de $V(\mathfrak{b}')$ est $V(\overset{-1}{h}(\mathfrak{b}'))$, d'où notre assertion, les idéaux de la forme $\overset{-1}{h}(\mathfrak{b}')$ étant tous les idéaux de A contenant $\mathfrak{a}$.

Corollaire. — *Soient* S *une partie multiplicative de* A, $A' = S^{-1}A$, *h l'homomorphisme canonique* i_A^S ; *alors* ${}^a h$ *est un homéomorphisme de* $X' = \mathrm{Spec}(A')$ *sur le sous-espace de* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *formé des idéaux premiers de* A *ne rencontrant pas* S.

En effet, soit $f' = f/s$ où $f \in A$, $s \in S$; on a $X'_{f'} = X'_{f/1}$ puisque $s/1$ est inversible dans A'. On sait déjà que ${}^a h$ est injective et que, pour tout $\mathfrak{p}' \in X'$, les relations $f/1 \in \mathfrak{p}'$ et $f \in \overset{-1}{h}(\mathfrak{p}') = {}^a h(\mathfrak{p}')$ sont équivalentes, donc les conditions $\mathfrak{p}' \in X'_{f/1}$ et ${}^a h(\mathfrak{p}') \in X_f$ sont équivalentes ; cela montre que ${}^a h(X'_{f'})$ est égal à $X_f \cap {}^a h(X')$, d'où la première assertion, puisque les X_f (resp. $X'_{f'}$) forment une base de la topologie de X (resp. X'). La seconde assertion résulte du § 2, n° 5, prop. 11, (ii).

Proposition 14. — *Soit* A *un anneau. Pour qu'une partie* Y *de* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *soit irréductible, il faut et il suffit que l'idéal* $\mathfrak{J}(Y)$ *soit premier.*

Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(Y)$, et notons que, pour un élément $f \in A$, la relation $f \in \mathfrak{p}$ est équivalente à $Y \subset V(f)$. Supposons Y irréductible, et soient f, g des éléments de A tels que $fg \in \mathfrak{p}$. On a donc

$$Y \subset V(fg) = V(f) \cup V(g) ;$$

comme Y est irréductible, $V(f)$ et $V(g)$ fermés, on a $Y \subset V(f)$ ou $Y \subset V(g)$, donc $f \in \mathfrak{p}$ ou $g \in \mathfrak{p}$, ce qui prouve que $\mathfrak{p}$ est premier.

Supposons maintenant $\mathfrak{p}$ premier ; on a $\overline{Y} = V(\mathfrak{p})$ (prop. 11, (ii)), et comme $\mathfrak{p}$ est premier, $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(\{\mathfrak{p}\})$, d'où $\overline{Y} = V(\mathfrak{J}(\{\mathfrak{p}\})) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ (prop. 11, (ii)). Comme un ensemble réduit à un point est irréductible, Y est irréductible (n° 1, prop. 2).

Corollaire 1. — *Pour qu'un anneau* A *soit tel que* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *soit irréductible, il faut et il suffit que le quotient de* A *par son nilradical* $\mathfrak{N}$ *soit intègre.*

En effet (prop. 11, (i)), $\mathfrak{J}(X)$ est la racine de l'idéal (0), c'est-à-dire $\mathfrak{N}$.

COROLLAIRE 2. — *L'application* $\mathfrak{p} \to V(\mathfrak{p})$ *est une bijection de* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *sur l'ensemble des parties fermées irréductibles de* X ; *en particulier les composantes irréductibles d'une partie fermée* Y *de* X *sont les ensembles* $V(\mathfrak{p})$, *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des éléments minimaux de l'ensemble des idéaux premiers de* A *qui contiennent* $\mathfrak{I}(Y)$.

Comme $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et $Y = V(\mathfrak{I}(Y))$ pour toute partie fermée Y de X, la première assertion résulte de la prop. 14 ; d'autre part, pour que $Y \supset V(\mathfrak{p})$, il faut et il suffit que $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{p})) \supset \mathfrak{I}(Y)$ (prop. 11), d'où la seconde assertion.

COROLLAIRE 3. — *L'ensemble des idéaux premiers minimaux d'un anneau nœthérien* A *est fini.*

En effet, $X = \operatorname{Spec}(A)$ n'a alors qu'un nombre fini de composantes irréductibles (cor. 7 de la prop. 11 et n° 2, prop. 10) et le corollaire résulte du cor. 2 précédent.

PROPOSITION 15. — *Soient* A *un anneau,* I *un ensemble fini,* E *l'ensemble des familles orthogonales* $(e_i)_{i\in I}$ *d'idempotents* $e_i \neq 0$ *de* A, *telles que* $\sum\limits_{i\in I} e_i = 1$. *Pour tout* $(e_i)_{i\in I} \in E$, *posons* $\varpi((e_i)_{i\in I}) = (V(A(1-e_i)))_{i\in I}$, $\sigma((e_i)_{i\in I}) = (Ae_i)_{i\in I}$. *Alors* ϖ *est une bijection de* E *sur l'ensemble* P *des partitions* $(U_i)_{i\in I}$ *de* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *en ensembles ouverts, et* σ *est une bijection de* E *sur l'ensemble* S *des familles* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ *d'idéaux* $\neq 0$ *de* A *telles que* A *soit somme directe des* $\mathfrak{a}_i$.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ un élément de E et posons $Y_i = V(A(1-e_i))$; si $i \neq j$, on a $1 = 1 - e_i + e_i(1-e_j) \in A(1-e_i) + A(1-e_j)$, d'où $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ (formules (1) et (2)). D'autre part,

$$\bigcup_{i\in I} Y_i = V(\prod_{i\in I} A(1-e_i)) \text{ (formule (3))} ;$$

par hypothèse $\prod\limits_{i\in I}(1-e_i) = 1 - \sum\limits_{i\in I} e_i = 0$, d'où $\bigcup\limits_{i\in I} Y_i = X$ (formule (1)). Comme les Y_i sont fermés, ils sont aussi ouverts, d'où $\varpi(E) \subset P$. Par ailleurs, on a évidemment $A = \sum\limits_{i\in I} Ae_i$; si $0 = \sum\limits_{i\in I} a_i e_i$

avec $a_i \in A$, on en tire, par multiplication par e_i, $0 = a_i e_i^2 = a_i e_i$ pour tout i ; ceci prouve que $\sigma(E) \subset S$.

Lemme 2. — *Si e, f sont deux idempotents de* A *tels que* Ae *et* Af *aient même racine, on a $e = f$.*

En effet, il existe par hypothèse des entiers $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ tels que $e = e^m \in Af$ et $f = f^n \in Ae$; soient x, y des éléments de A tels que $e = xf$, $f = ye$; on a $ef = xf^2 = xf = e$ et de même $ef = ye^2 = ye = f$, d'où $e = f$.

Le lemme 2 et le cor. 2 de la prop. 11 montrent que les applications ϖ et σ sont *injectives.*

Montrons que σ est surjective. Si $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ est un élément de S, il y a des éléments $e_i \in \mathfrak{a}_i$ tels que $1 = \sum_{i \in I} e_i$; si $i \neq j$, on a $e_i e_j \in \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$, d'où $e_i = \sum_{j \in I} e_i e_j = e_i^2$; enfin, on a $Ae_i \subset \mathfrak{a}_i$ pour tout $i \in I$ et $\sum_{i \in I} Ae_i = A$, d'où $Ae_i = \mathfrak{a}_i$.

Reste enfin à montrer que ϖ est surjective. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un élément de P et posons $Z_i = \complement U_i = \bigcup_{j \neq i} U_j$; comme U_i et Z_i sont fermés, il existe des idéaux $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ de A tels que $U_i = V(\mathfrak{a}_i)$, $Z_i = V(\mathfrak{b}_i)$. On va montrer qu'on peut de plus supposer que $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}_i = 0$. On a $U_i \cap Z_i = \emptyset$, d'où $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i = A$; soient $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $b_i \in \mathfrak{b}_i$ tels que $a_i + b_i = 1$. On a $X = U_i \cup Z_i = V(\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i)$ (formule (3)) ; tout élément de $\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i$ est donc nilpotent (cor. 2 de la prop. 11) ; soit p un entier tel que $a_i^p b_i^p = 0$. On a $U_i \subset V(Aa_i) = V(Aa_i^p)$, $Z_i \subset V(Ab_i) = V(Ab_i^p)$ et $V(Aa_i) \cap V(Ab_i) = V(Aa_i + Ab_i) = \emptyset$, donc $U_i = V(Aa_i^p)$ et $Z_i = V(Ab_i^p)$, ce qui établit notre assertion en remplaçant $\mathfrak{a}_i$ par Aa_i^p et $\mathfrak{b}_i$ par Ab_i^p. Les idéaux $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{b}_i$ étant ainsi choisis, il résulte de ce que σ est bijective qu'il existe deux idempotents $f_i \in \mathfrak{a}_i$, $e_i \in \mathfrak{b}_i$ tels que $1 = e_i + f_i$, $e_i f_i = 0$, $\mathfrak{a}_i = Af_i$, $\mathfrak{b}_i = Ae_i$. Si $i \neq j$, on a $X = Z_i \cup Z_j = V(Ae_i e_j)$, et comme $e_i e_j$ est un idempotent, le lemme 2 montre que $e_i e_j = 0$. Enfin $e = \sum_{i \in I} e_i$ est idempotent et on a $e_i \in Ae$ pour tout $i \in I$, d'où $V(Ae) \subset Z_i$ pour tout i ; il en résulte que $V(Ae) = \emptyset = V(A.1)$ et le lemme 2 montre encore que $e = 1$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Soient* A *un anneau*, $\mathfrak{r}$ *un nilidéal de* A, $h : A \rightarrow A/\mathfrak{r}$ *l'homomorphisme canonique. Pour toute famille orthogonale finie* $(e'_i)_{i \in I}$ *d'idempotents de* $A/\mathfrak{r}$, *telle que* $\sum_{i \in I} e'_i = 1$, *il existe une famille orthogonale finie* $(e_i)_{i \in I}$ *d'idempotents de* A *telle que* $\sum_{i \in I} e_i = 1$ *et* $h(e_i) = e'_i$ *pour tout* $i \in I$.

Posons $A' = A/\mathfrak{r}$. On sait (*Remarque* suivant la prop. 13) que

$$^a h : \mathrm{Spec}(A') \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

est un homéomorphisme bijectif, tout idéal premier de A contenant $\mathfrak{r}$ par hypothèse. La prop. 15 montre qu'il existe dans A une famille orthogonale finie $(e_i)_{i \in I}$ d'idempotents telle que $\sum_{i \in I} e_i = 1$ et que l'image par $^a h$ de $V(A'(1 - e'_i))$ soit $V(A(1 - e_i))$. Mais il est clair que $V(A(1 - e_i))$ est aussi l'image par $^a h$ de $V(A'(1 - h(e_i)))$; comme $1 - e'_i$ et $1 - h(e_i)$ sont des idempotents, le lemme 2 montre que $e'_i = h(e_i)$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2. — *Pour que le spectre premier* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *d'un anneau* A *soit connexe, il faut et il suffit qu'il n'existe dans* A *aucun idempotent autre que* 0 *et* 1.

Dire en effet que X n'est pas connexe signifie qu'il existe dans X un ensemble ouvert et fermé distinct de $\varnothing$ et de X.

4. Support d'un module

DÉFINITION 5. — *Soient* A *un anneau*, M *un* A-*module. On appelle support de* M, *et on note* Supp(M), *l'ensemble des idéaux premiers* $\mathfrak{p}$ *de* A *tels que* $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

Comme tout idéal maximal de A est premier, il résulte aussitôt du § 3, n° 3, cor. 2 du th. 1, que, pour qu'un A-module M soit réduit à 0, *il faut et il suffit que* $\mathrm{Supp}(M) = \varnothing$.

Exemple. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A ; avec les notations du n° 3, on a

$$V(\mathfrak{a}) = \mathrm{Supp}(A/\mathfrak{a}). \tag{9}$$

En effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A tel que $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, on sait que $(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = 0$ (§ 3, n° 1, *Remarque* 3) ; si au contraire $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ est