

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 3 MARS 1941.

PRÉSIDENTE DE M. HYACINTHE VINCENT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES NOMBRES. - *Applications du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. Théorème de Goldbach.*

Note de M. **Émile Borel**.

J'ai entrepris, il y a quelques années, des recherches statistiques variées sur les nombres premiers¹ et j'ai eu l'occasion d'exposer certains de leurs résultats dans mes cours. Je voudrais résumer brièvement aujourd'hui les conclusions essentielles auxquelles j'ai été conduit et les appliquer au théorème de Goldbach et à ses généralisations.

La conclusion générale à laquelle j'ai été conduit est la suivante : soit E un ensemble fini de nombres entiers ; soit N leur nombre, A et B leurs limites inférieure et supérieure ; on supposera $B < A + \sqrt{A}$; soit f la fréquence moyenne des nombres premiers dans l'intervalle $B - A$; le nombre probable des nombres premiers de l'ensemble E est Nf . *Si la définition de l'ensemble E , jointe aux propriétés arithmétiques les plus élémentaires, n'entraîne pas la conséquence que le nombre réel n des nombres premiers de E doit être inférieur ou supérieur à $Nf = \nu$, on a le droit d'appliquer le théorème de Poisson et d'affirmer que la probabilité pour que ce nombre (des nombres premiers de E) soit égal à n est*

$$p_n = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}.$$

Par suite les valeurs de n pour lesquelles p_n serait extrêmement petit, inférieur par exemple à 10^{-50} , pourront être exclues et l'on pourra donc affirmer que n est compris entre certaines limites n' et n'' .

Ceci s'étend aisément au cas où, au lieu d'un ensemble E , on en considère un nombre fini E_1, E_2, \dots, E_k .

Passons au cas où l'on considère une infinité d'ensembles E ; désignons par p_k la probabilité calculée, comme il vient d'être dit, pour que le nombre n_k des nombres premiers de l'ensemble E_k ne soit pas compris entre n'_k et n''_k . Si la série $\sum p_k$ est convergente et a une somme inférieure à 10^{-50} , on pourra affirmer, avec une absolue certitude pratique que l'on a, pour toutes les valeurs de k ,

$$n'_k < n_k < n''_k.$$

Appliquons ce qui précède au théorème de Goldbach, suivant lequel tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers : $2a = p + p'$.

Nous précisons ce théorème en ajoutant que l'un des nombres premiers est inférieur à une fonction donnée $\varphi(a)$:

$$p' < \varphi(a) < \sqrt{a}.$$

La note originale peut être consultée ici : <http://denisevellachemla.eu/CRAS-Borel-1941-proba-Goldbach.pdf>.

¹Je dois remercier M. Z. Sougarev, dont l'aide m'a été précieuse pour les computations exigeant l'emploi des tables de nombres premiers.

C. R. 1941, 1^{er} Semestre (T. 212, N° 9.)

Soit A le nombre des nombres premiers inférieurs à $\varphi(a)$; considérons l'ensemble E_a des nombres $2a - p'$; cet ensemble est composé de A nombres ; si f est la fréquence des nombres premiers dans l'intervalle $2a, 2a - \sqrt{a}$, le nombre moyen des nombres premiers de E_a serait $\nu_a = Af$; la probabilité pour que le nombre réel des nombres premiers de E_a soit nul, c'est-à-dire pour que notre théorème soit faux est $e^{-\nu_a}$. Si donc la fonction $\varphi(a)$ est choisie de telle manière que la série

$$(S) \quad \sum_{a=\alpha}^{\infty} e^{-\nu_a}$$

soit convergente et inférieure à 10^{-50} , notre théorème sera pratiquement certain. Le nombre α sera pris assez grand et tel cependant que le théorème puisse être vérifié empiriquement pour les valeurs de a inférieures à α .

En fait, le raisonnement précédent doit être complété, car nous sommes ici dans le cas où les propriétés arithmétiques élémentaires modifient la fréquence f . Lorsqu'un nombre est choisi au hasard, la probabilité pour qu'il soit divisible par 3 est $1/3$. Si p' est un nombre premier et si $2a$ est divisible par 3, la probabilité pour que $2a - p'$ soit divisible par 3 est nulle ; si $2a$ n'est pas divisible par 3, la probabilité pour que $2a - p'$ soit divisible par 3 est $1/2$. Par suite, la fréquence f devra être diminuée si $2a$ n'est divisible par aucun des petits nombres premiers impairs (de 3 à 97 par exemple) et notablement augmentée si $2a$ admet les diviseurs 3, 5, 7.

Les calculs suivants ont été faits pour $1\ 000\ 000 < 2a < 1\ 000\ 200$. On a supposé $p' < 10\ 000$ et on a dénombré les nombres premiers p égaux à $2a - p'$. Voici les résultats de ce dénombrement classés d'après les petits diviseurs premiers impairs de a .

Tous les diviseurs impairs de a sont >13 : 110, 106, 104, 115, 131, 132, 133, 121, 118, 119, 118, 112, 127, 110, 128, 108, 123, 119, 115, 124, 117, 123, 112, 113, 126, 130, 115, 116, 123, 120, 115, 115, 126, 118, 131, 131, 124, 111, 123.

a est divisible par	$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$	13	: 137, 123, 126.
		11	: 132, 137, 137.
		7	: 145, 138, 143, 158, 144, 149, 144.
		5	: 166, 148, 176, 160, 172, 157, 178, 160, 149, 162, 168.
		5 et par 7	: 191, 211.
		3	: 246, 257, 234, 238, 256, 243, 237, 231, 232, 226, 226, 230, 273. 248, 254, 219, 233, 238, 231, 262, 233, 238, 267.
		3 et par 7	: 280, 282, 270, 278.
		3 et par 5	: 310, 299, 345, 329, 312, 311.
		3, par 5 et par 7	: 370.

Ces résultats sont, on s'en assure aisément, tout à fait semblables à ceux que donnerait le hasard, en ce qui concerne notamment les écarts par rapport aux valeurs moyennes².

Pour tous ceux qui ont l'habitude des suites statistiques de nombres entiers, le caractère fortuit de ces séries de nombres, en particulier de la première (les diviseurs impairs de a sont supérieurs à 13) s'impose avec évidence³.

On constate que, si l'on prend

$$\varphi(a) = 50(\log a)^3,$$

²Des résultats absolument analogues ont été obtenus pour les nombres $2a$ compris entre 2 000 000 et 2 000 200.

³Nous avons tenu à donner les nombres bruts constatés ; on pourrait faciliter l'étude des séries de ces nombres en modifiant les nombres obtenus dans les cas où a est divisible par des petits nombres premiers de manière à les ramener à ce qu'ils seraient si cette circonstance ne se produisait pas ; par exemple les nombres obtenus pour a divisible par 3 devraient être divisés par 3 etc. On aurait ainsi 100 nombres dont la répartition serait celle qui résulte du théorème de Poisson, c'est-à-dire une répartition gaussienne.

en désignant par \log les logarithmes vulgaires (à base 10), la condition relative à la série (S) est satisfaite. On peut donc énoncer ce résultat : *tout nombre pair $2a$ est la somme de deux nombres premiers dont l'un est inférieur à $50(\log a)^3$. La probabilité pour que cet énoncé soit faux est inférieure à 10^{-50} .*

Bien entendu, ces démonstrations basées sur les probabilités ne peuvent être comparées aux démonstrations rigoureuses de la théorie des nombres. Les recherches tendant à obtenir de telles démonstrations rigoureuses continueront à être poursuivies car, même si elles n'aboutissent pas, elles contribuent à enrichir la science de méthodes nouvelles et de résultats souvent intéressants.

Il serait cependant injuste de considérer comme négligeables les résultats que l'on peut déduire du calcul des probabilités. Ils entraîneront la conviction de tous ceux qui ont réfléchi quelque peu sur la signification d'une probabilité inférieure à 10^{-50} ou 10^{-100} et ont compris qu'une telle probabilité doit être pratiquement traitée comme égale à zéro (lorsqu'il s'agit soit d'une épreuve unique, soit d'un ensemble fini ou infini d'épreuves, considéré comme une épreuve unique dont on a calculé la probabilité globale).

Il est à peine besoin d'ajouter que le calcul des probabilités peut être utilisé non seulement comme une méthode de démonstration, mais aussi et surtout comme un instrument de recherche.