

Méthode de Turing pour la fonction zeta de Selberg

ANDREW R. BOOKER ET DAVID J. PLATT

Résumé : Dans un de ses derniers articles de recherche, Alan Turing introduisit une méthode pour certifier la complétude d'une liste prétendue de zéros de la fonction zeta de Riemann. Dans cet article, nous considérons la méthode de Turing selon le modèle des fonctions zeta de Selberg, et nous démontrons qu'elle peut être mise en œuvre de manière rigoureuse dans le cas prototype d'une surface modulaire.

Introduction

Dans [28], Turing a décrit et implémenté une procédure numérique pour vérifier l'hypothèse de Riemann (RH) jusqu'à une certaine valeur T dans la bande critique. La procédure de Turing était similaire à des recherches numériques antérieures au sujet de RH par Gram [11], Backlund [2], Hutchinson [16] et Titchmarsh [27], dans le sens où elles sont toutes basées sur le fait d'isoler les zéros sur la droite critique en trouvant des changements de signe de la fonction de Hardy $Z(t)$, et en confirmant alors qu'aucun zéro n'a pu être raté. L'approche de Turing diffère seulement dans la dernière étape ; là où les auteurs précédents avaient utilisé des procédures ad hoc qui ne sont valides que pour des petites valeurs de T , Turing a introduit une méthode pour certifier la complétude d'une liste supposée de zéros de $Z(t)$ qui est garantie de fonctionner (quand la liste en question est vraiment complète). La méthode de Turing est restée un ingrédient petit mais essentiel dans toutes les vérifications ultérieures de RH et de ses nombreuses généralisations ; voir [5] et [6] pour en connaître davantage au sujet de la méthode de Turing et de son fondement historique.

Pendant ce temps, des chercheurs de la communauté de la physique des hautes énergies ont depuis les années 90 appliqué la même idée pour certifier des listes de zéros de fonctions zeta de Selberg pour les variétés hyperboliques, bien qu'à un niveau heuristique (sans estimations explicites d'erreur) et sans que cela soit attribué à Turing ; voir par exemple [25], où cela a été utilisé dans les premières investigations de grandes valeurs propres du Laplacien pour le groupe modulaire, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Dans cet article nous montrons, davantage dans l'esprit des calculs de Turing, que la méthode peut être rendue rigoureuse dans le cas du groupe modulaire.

Nous commençons par décrire la méthode de Turing en grand détail, dans le contexte de la fonction zeta de Selberg.

Dénotons par $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ le plan hyperbolique, et par $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ une séquence complète de cuspides de Hecke–Maass sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$, avec les valeurs propres du Laplacien $\frac{1}{4} + r_j^2$ satisfaisant $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots$. Alors la fonction zeta de Selberg associée $Z_{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})}(s)$ a des zéros en $s = \frac{1}{2} \pm ir_j$.

Notons par $N(t) = \#\{j : r_j \leq t\}$ la fonction comptant les zéros dans le demi-plan supérieur et supposons que nous avons précisément calculé quelques r_j jusqu'à une certaine valeur T , alors nous

andrew.booker@bristol.ac.uk, dave.platt@bris.ac.uk

École de mathématiques, université de Bristol, Bristol, BS8 1TW, UK

Les auteurs ont été partiellement financés par la subvention EPSRC Grant EP/K034383/1.

Référence de l'article : <https://arxiv.org/pdf/1710.00603.pdf>

Traduction en français (démonstrations et annexe omises) : Denise Vella-Chemla, octobre 2021

voulons construire un minorant $N^-(t)$ de la fonction en escalier $N(t)$, pour $t \leq T$. Supposons hypothétiquement que nous ayons raté un r_j en $T - H$ pour un certain $H > 0$, de telle façon que $N(t) \geq N^-(t) + 1$ pour $t \geq T - H$. En intégrant cette inégalité, nous obtenons

$$(1.1) \quad \int_0^T N^-(t)dt + H \leq \int_0^T N(t)dt = \int_0^T (T - t)dN(t) = \text{Tr}(h_0),$$

où $h_0(r) = \max(0, T - |r|)$ et $\text{Tr}(h) = \sum_{j=1}^{\infty} h(r_j)$ dénote la trace de h sur le spectre cuspidal. Malheureusement, bien que h_0 ait une trace dans ce sens-là, il n'est pas adéquat pour qu'on puisse appliquer la formule de trace de Selberg, mais nous pouvons obtenir cela en remplaçant h_0 par un majorant h_0^+ avec la transformation de Fourier de support compact. Par conséquent, on a $\int_0^T N^-(t)dt + H \leq \text{Tr}(h_0^+)$.

En appliquant la formule de trace, le côté droit sera le terme principal attendu (décrivant la loi de Weyl) plus l'erreur qui vient du fait de tronquer le support de la transformée de Fourier. S'il se trouve que nous n'avons effectivement raté aucun zéro et que nous les connaissons avec suffisamment de précision, alors nous pouvons nous attendre à ce que $\int N^-(t)dt$ soit proche du terme principal, et en fait, il peut même dépasser le terme principal parfois. Cela nous donne une borne supérieure $H \leq H^+$, i.e. nous pouvons probablement montrer qu'il ne manque pas de zéros jusqu'à la valeur $T - H^+$. De plus, en utilisant à la fois les bornes supérieure et inférieure pour $\text{Tr}(h_0)$, nous pouvons estimer $\int_{T_1}^{T_2} N(t)dt$, ce qui devrait nous permettre d'effectuer la procédure en utilisant uniquement les zéros dans un intervalle autour de T .

Il est garanti que cette approche marche pour des T suffisamment grands parce que le terme d'erreur $S(t)$ dans la loi de Weyl a 0 comme valeur moyenne; précisément, on sait que $\frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt = O((\log T)^{-2})$ (voir [14] [Ch. 10, Thm. 2.29]). Par conséquent, on peut s'attendre à démontrer par cette méthode qu'il ne manque pas de zéros jusqu'à $T - O(T(\log T)^{-2})$.

Le reste de l'article est dédié à l'obtention d'une telle borne avec des constantes explicites (et pratiques!). Notre résultat précis est le suivant :

Théorème 1.1 : Définissons

$$S(t) = N(t) - \left(\frac{t^2}{12} - \frac{2t}{\pi} \log \frac{t}{e\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - \frac{131}{144} \right) \quad \text{et} \quad E(t) = \left(1 + \frac{6.59125}{\log t} \right) \left(\frac{\pi}{12 \log t} \right)^2.$$

Alors pour $T > 1$,

$$(1.2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt \leq E(T).$$

Pour démontrer l'utilisation de cette borne en pratique, nous l'appliquons à une liste de zéros $r_j \leq 178$, qui sont fournis avec une précision à la vingtième décimale dans [8]. Cette liste nous a été gentiment fournie par Andreas Strömbergsson, qui a calculé les r_j en utilisant l'algorithme d'Hejhal [13] et les a vérifiés en utilisant le programme de [10].

En utilisant le théorème 1.1, nous obtenons le :

Corollaire 1.2 La fonction zeta de Selberg pour $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ a exactement 2 184 zéros de partie imaginaire dans $(0, 177.75]$. Tous ces zéros sont simples.

Remarques :

1. Notre méthode peut également être utilisée pour démontrer la borne inférieure

$$\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \geq -(2 + o(1)) \left(\frac{\pi}{12 \log t} \right)^2,$$

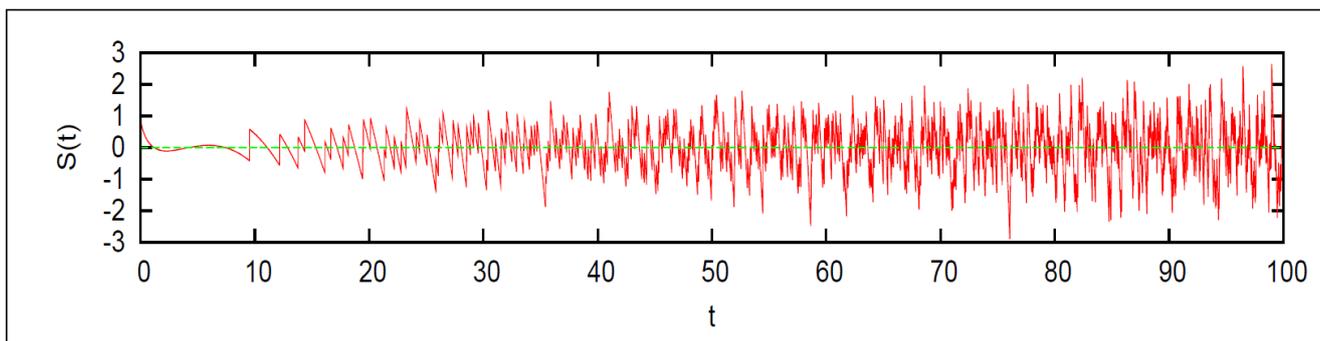
bien que nous ne le démontrions pas ici. La différence de 2 entre la borne supérieure et la borne inférieure est due à une asymétrie quand on approxime h_0 par le dessus et par le dessous par des fonctions à bande limitée, comme nous l'expliciterons dans la prochaine section.

2. En suivant Selberg, Hejhal a démontré l'analogie de l'estimation $\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \ll (\log T)^{-2}$ pour un groupe Fuchsien cofini général, en utilisant la théorie de la fonction zeta de Selberg ; voir [15] [Ch. 2, Thm. 9.7] et [14] [Ch. 10, Thm. 2.29].

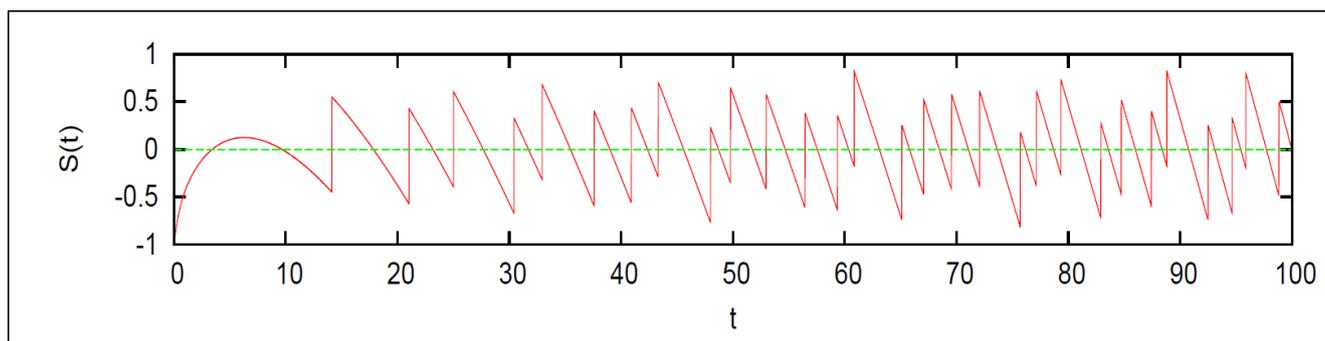
Sarnak a suggéré que cette estimation pourrait être obtenue directement via la formule de trace, et notre travail réalise ce but dans le cas de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Notre méthode pourrait être généralisée aux sous-groupes de congruence, et nous nous attendons à ce que les constantes impliquées qu'elle produit soient comparées favorablement à la méthode de Selberg–Hejhal (qui n'a pas été rendue explicite, à notre connaissance).

Dans le cas spécifique du groupe modulaire, l'asymptote complète pour $N(t)$ apparaissant dans le théorème 1.1 a été calculée par Steil [25]. Une preuve détaillée a été donnée par Jorgenson, Smajlović et Then [19], qui a également calculé l'asymptote dans le cas des groupes monstres.

3. La constante de l'ordre dominant $(\pi/12)^2$ devrait en principe être divisée par 4 en utilisant la formule de Kuznetsov et la méthode de Li et Sarnak [20] ; pourtant, il devrait être lourd de travailler en dehors d'un terme explicite d'erreur dans ce contexte. Une manière plus pratique d'obtenir des économies d'un facteur 2 dans les résultats asymptotiques serait de séparer le spectre en partie paire et impaire et dériver une limite pour chaque partie séparément ; même alors, pourtant, les termes d'erreur secondaires seraient pires, et cela ne devrait pas résulter en une économie pour T quelle que soit sa taille.
4. L'estimation (1.2) est substantiellement plus faible que l'estimation de Turing dans le contexte de la fonction zeta de Riemann, qui est $O\left(\frac{\log T}{T}\right)$. Une raison-clef de ceci est que la fonction zeta de Selberg a une densité plus grande de zéros dans les grandes valeurs ($\sim \frac{1}{6}t$ vs. $\sim \frac{1}{2\pi} \log t$ pour la fonction zeta de Riemann), qui en retour rend $S(t)$ plus bruyante ; voir les Figures 1 et 2 pour une comparaison des deux sur le domaine $t \in [0, 100]$. En fait, c'est seulement en vertu du fait que l'analogie de RH est connue pour être vérifiée dans ce contexte que nous pouvons démontrer que $\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = o(1)$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Le vrai niveau de décroissance de $\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$ n'est pas connu, mais des calculs numériques extensifs de Then [26] suggèrent qu'il devrait être en $o(T^{-\frac{1}{2}})$.



$S(t)$ pour la fonction zeta de Selberg.



$S(t)$ pour la fonction zeta de Riemann.

La structure de cet article est la suivante. Dans la Section 1.1, nous montrons comment l'optimisation de notre limite supérieure amène naturellement à un problème extrémal en analyse de Fourier, et nous brossons une solution qui explique les constantes d'ordre dominant auxquelles nous pouvons nous attendre. Dans la Section 2, nous rappelons la formule de trace de Selberg pour $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, qui sera notre outil principal. Nous déduisons alors une asymptote pour le terme principal de la formule de trace appliquée à h_0 (Section 3) que nous pouvons utiliser pour estimer la moyenne de T (Section 4). La Section 5 décrit le calcul pour borner la constante B introduite dans la Section 4, et finalement, dans la Section 6, on vérifie le théorème 1.1 en considérant T dans les quatre intervalles $(1, 100]$, $[100, 27\,400]$, $[27\,400, 10^6]$ et $[10^6, \infty)$.

Remerciements

Nous voulons remercier Peter Sarnak pour des commentaires utiles et les referees anonymes pour leur retour très utile et leurs corrections.

Un problème extrémal

L'erreur principale dans notre estimation vient du fait d'approximer h_0 par h_0^+ pour la borne supérieure, et similairement par un minorant pour la borne inférieure. Pour contrôler ces erreurs, nous avons deux objectifs contraires. Premièrement, nous voulons que h_0^+ soit une bonne approximation de h_0 , pour minimiser la contribution des termes principaux à la formule de trace, qui, pour les grandes valeurs de T , sont essentiellement de la forme $\frac{1}{12} \int_{\mathbb{R}} |r| h_0^+(r) dr$. Deuxièmement, nous voulons que le support de la transformée de Fourier de h_0^+ soit le plus petit possible, de façon à contrôler la contribution des termes hyperboliques. Par conséquent, nous sommes naturellement

amenés au problème suivant :

Objectif : Appelons $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$. Étant donné un $\Delta > 0$ grand, trouver les fonctions f^\pm telles que

1. les transformées de Fourier \hat{f}^\pm ont leur support dans $[-\Delta, \Delta]$;
2. $f^-(x) \leq f(x) \leq f^+(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
3. $\int_{\mathbb{R}} |x|(f(x) - f^-(x))dx$ et $\int_{\mathbb{R}} |x|(f^+(x) - f(x))dx$ sont minimaux.

Dans cette section, nous obtenons le résultat suivant dans cet objectif.

Proposition 1.3 : Il y a des fonctions f^\pm comme ci-dessus avec

$$(1.3) \quad \int_{\mathbb{R}} |x|(f(x) - f^-(x))dx = \frac{1 + o(1)}{6\Delta^2} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|(f^+(x) - f(x))dx = \frac{1 + o(1)}{12\Delta^2}$$

lorsque $\Delta \rightarrow \infty$.

Remarque : Il semble vraisemblable que ce résultat soit asymptotiquement le meilleur possible. Pourtant, nous ne tentons pas de prouver cela ici.

La formule de trace pour $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Notre outil principal sera la version suivante de la formule de trace de Selberg.

Proposition 2.1 : (La formule de trace de Selberg pour les formes de Maass sur $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$) Soit $\{r_j\}_{j=1}^\infty$ comme dans l'introduction. De plus, pour un $\delta > 0$ fixé, soit $h(t)$ une fonction analytique sur $\{t \in \mathbb{C} : |\Im t| \leq \frac{1}{2} + \delta\}$ satisfaisant $|h(t)| \ll (1 + |\Re t|)^{-2-\delta}$ et $h(t) = h(-t)$. Définissons \hat{h} , la transformée de Fourier de h , via

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}} h(r) \exp(-2\pi i r t) dr.$$

Alors,

$$\text{Tr}(h) = \sum_{j=1}^{\infty} h(r_j) = M(h) + R(h),$$

où

$$M(h) = (I + E + P)(h) - h(0), \quad R(h) = (D - C)(\hat{h}),$$

$$\begin{aligned} I(h) &= \frac{1}{12} \int_{\mathbb{R}} r \tanh(\pi r) h(r) dr = -\frac{1}{24\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}'(t)}{\sinh \pi t} dt, \\ E(h) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cosh\left(\frac{\pi r}{3}\right)}{\cosh(\pi r)} h(r) dr = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{8 \cosh \pi t} + \frac{2 \cosh \pi t}{3 + 6 \cosh 2\pi t} \right) \hat{h}(t) dt, \\ P(h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\log 2\pi - 2\psi(1 + 2ir)) h(r) dr \\ &= \frac{\hat{h}(0)}{2\pi} \left(\log \frac{\pi}{2} + 2\gamma \right) - \frac{h(0)}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log \left(4 \sinh \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right) \hat{h}'(t) dt, \end{aligned}$$

$$D(\widehat{h}) = \frac{1}{\pi} \sum_{t=3}^{\infty} \frac{L(1, \chi_d)}{t} \prod_{p|t} \left(1 + (p - \chi_d(p)) \frac{(p^\infty, t) - 1}{p - 1} \right) \widehat{h} \left(\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \right) \right) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} \widehat{h} \left(\frac{\log n}{\pi} \right)$$

et

$$C(\widehat{h}) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) (\cosh \pi t - 1) dt.$$

Dans la définition de D , nous écrivons $t^2 - 4 = dl^2$, où d est un discriminant fondamental, $l > 0$, χ_d est le caractère quadratique correspondant, et $(p^\infty, l) = \gcd(p^\infty, l)$ est la plus grande puissance de p divisant l .

Remarque : On fait référence par I , E , P , D et C aux termes respectivement identité, elliptique, parabolique, discret et continu. Pour des fonctions de test “larges” (celles de la sorte utilisée pour mesurer la loi de Weyl), on peut penser à M et R comme au terme principal et au reste, respectivement.

Bien que les termes de la formule de trace soient seulement définis pour des fonctions de test analytiques, à la fois $\text{Tr}(h)$ et $M(h)$ peuvent être interprétées pour toute fonction paire, continue $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant $h(t) \ll (1 + |t|)^{-2-\delta}$. En retour, pour tout tel h , on peut définir $R(h)$ par l'égalité $\text{Tr}(h) = M(h) + R(h)$.

Une asymptote pour $M(h_0)$

Rappelons que si on pose $h_0(r) = \max(0, T - |r|)$ alors $\text{Tr}(h_0) = \int_0^T N(t) dt$, où N est la fonction de comptage du 1.1. Motivés par cela, nous établissons la borne supérieure asymptotique suivante pour $M(h_0)$:

Proposition 3.1 : Pour $T \geq 4$, on a

$$M(h_0) \leq \frac{1}{36} T^3 - \frac{\log(T)}{\pi} T^2 + \frac{3 + \log \frac{\pi}{2}}{2\pi} T^2 - \frac{131}{144} T + \frac{\log T}{24\pi} + C_0,$$

où

$$C_0 = \frac{\zeta(3)}{16\pi^3} - \frac{1}{4\pi^2} \left(2L(2, \chi_{-4}) + 3\sqrt{3}L(2, \chi_{-3}) \right) - \frac{1}{2\pi} \left(\zeta'(-1) - \frac{\log 2 + 1}{12} \right).$$

La preuve consiste à examiner les contributions provenant du terme identité, des termes elliptiques, des termes paraboliques et de la fonction propre constante, comme suit.

Le terme identité

Lemme 3.2 : Pour $T \geq 0$, on a

$$\frac{1}{12} \int_{-T}^T (T - |r|) r \tanh(\pi r) dr \leq \frac{T^3}{36} - \frac{T}{144} + \frac{\zeta(3)}{16\pi^3}.$$

Les termes elliptiques

Lemme 3.3 : De façon similaire, pour $T \geq 0$, on obtient

$$\int_{-T}^T (T - |r|) \frac{\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{9} \cosh(\pi r/3)}{\cosh(\pi r)} dr \leq \frac{25T}{72} - \frac{L(2, \chi_{-4})}{2\pi^2} - \frac{3\sqrt{3}L(2, \chi_{-3})}{4\pi^2} + E_e,$$

où

$$E_e = \frac{\exp(-\pi T)}{2\pi} \left(T + \frac{1}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[e^{\pi T/3} \left(8T + \frac{12}{\pi} \right) + e^{-\pi T/3} \left(4T + \frac{3}{\pi} \right) \right] \right).$$

Les termes paraboliques

Nous avons besoin du lemme préparatoire suivant.

Lemme 3.4 : Écrivons $\log \Gamma(z) = A(z) + R(z)$, où $A(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + 1/(12z)$.

Alors on a

$$C_1 := \Re \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i\infty} R(z) dz = \frac{1}{2} \zeta'(-1) + \frac{\log 2}{12} + \frac{1}{48}$$

et

$$C_1 := \Re \int_1^{1+i\infty} R(z) dz = -\zeta'(-1) - \frac{1}{6}.$$

Nous pouvons maintenant traiter le terme parabolique comme suit :

Lemme 3.5 : Soit $T > 1$. Alors

$$\begin{aligned} P(h_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T (T - |r|) (\log(2\pi) - \psi(1 + 2ir)) dr \\ &\leq \frac{3 - 2 \log T + \log(\pi/2)}{2\pi} T^2 - \frac{T}{4} + \frac{1}{24\pi} + \frac{\log T}{24\pi} + \frac{\log 2}{24\pi} - \frac{\zeta'(-1)}{2\pi} \\ &\quad - \frac{241}{5760\pi} T^{-2} + \frac{17641}{161280\pi} T^{-4}. \end{aligned}$$

La fonction propre constante

Lemme 3.6 : La contribution de la fonction propre constante est trivialement

$$-h_0(0) = -T.$$

Preuve de la Proposition 3.1

Nous combinons maintenant les lemmes 3.2, 3.3, 3.5 et 3.6, en observant que

$$-\frac{241}{5760\pi} T^{-2} + \frac{17641}{161280\pi} T^{-4} + E_e(T)$$

est négatif pour $T \geq 4$.

Une borne supérieure pour $\int S(t)dt$

Nous allons maintenant utiliser la formule de trace pour dériver une borne supérieure pour $\int S(t)dt$. On commence par des lemmes préparatoires.

Lemme 4.1 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, paire telle que $x^2\varphi(x)$ est absolument intégrable et $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$. Définissons

$$F(r) = \int_{-\infty}^r \int_{-\infty}^y \varphi(x)dx dy - \max(0, r).$$

Alors F est paire et absolument intégrable, de transformée de Fourier égale à

$$\widehat{F}(t) = \frac{1 - \widehat{\varphi}(t)}{(2\pi t)^2}.$$

Lemme 4.2 : Soit $h_0(r) = \max(0, T - |r|)$ et φ, F définis comme dans le Lemme 4.1. Alors

$$(h_0 * \varphi - h_0)(r) = F(r - T) + F(r + T) + 2F(r).$$

Lemme 4.3 : Soit φ définie comme dans le Lemme 4.1. Supposons que $\widehat{\varphi}$ est du support compact, de telle façon que φ se prolonge en une fonction entière, et définissons

$$V(r) = \int_{-\infty}^r \int_{-\infty}^y \varphi(x)dx dy \quad \text{pour } r \in \mathbb{C}.$$

Alors, pour tout $T \in \mathbb{R}$, on a

$$C\left(\frac{\cos(2\pi Tt)}{2(\pi t)^2} \widehat{\varphi}(t)\right) = 2V(-T) - 2 \Re V\left(\frac{i}{2} - T\right),$$

où $C(\cdot)$ est comme défini dans la Proposition 2.1.

Proposition 4.4 : Soient φ, F et V définis comme dans les Lemmes 4.1–4.3, et supposons que $F(r) \geq 0$ pour $r \in \mathbb{R}$. Soit $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire C^2 de support compact avec $\beta(0) = 1$, et soit h_2 la fonction continue de transformée de Fourier

$$\widehat{h}_2(t) = \frac{1 - \beta(t)}{2(\pi t)^2}.$$

Définissons

$$B = R(h_2) + (D - C)\left(\frac{\beta(t)}{2(\pi t)^2}\right)$$

et

$$k(r) = \frac{r \tanh(\pi r)}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cosh\left(\frac{\pi r}{3}\right) + \frac{\log(2\pi) - 2 \Re \psi(1 + 2ir)}{2\pi}.$$

Alors pour $T \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T S(t)dt &\leq \int_{\mathbb{R}} [k(T+r) + k(T-r)]F(r)dr - D\left(\frac{\cos(2\pi Tt)}{2(\pi t)^2} \varphi(t)\right) + B + C_0 \\ &\quad + \frac{\log T}{24\pi} - 2 \Re V\left(\frac{i}{2} - T\right), \end{aligned}$$

avec la constante C_0 définie comme dans la Proposition 4.3 ci-dessus.

Borne pour les grandes valeurs de T

Pour les valeurs de T relativement petites, on peut traiter les choses de façon à ce que le terme discret soit traitable. Pour les grandes valeurs de T , on utilise la proposition suivante :

Proposition 4.5 : On reprend les notations utilisées dans la Proposition 4.4 et on suppose que $\widehat{\varphi}(t) \geq 0$ pour $t \in \mathbb{R}$. Alors pour $T \geq 4$,

$$(4.2) \quad \int_0^T S(t)dt \leq \int_{\mathbb{R}} [k(T+r) + k(T-r) + 2k(r)] F(r)dr \\ - 2 \Re \left(V\left(\frac{i}{2}\right) + V\left(\frac{i}{2} - T\right) \right) + 2B + C_0 + \frac{\log T}{24\pi}.$$

Borner la constante B

La première tâche consiste à dériver une borne rigoureuse pour la constante B , dont nous rappelons qu'elle est définie par

$$B = R(h_2) + (D - C) \left(\frac{\beta(t)}{2(\pi t)^2} \right).$$

Une forme adéquate pour β

Soient $a, b, c > 0$ et définissons

$$(5.1) \quad \widehat{\beta}(r) = c \operatorname{sinc}(\pi ar)^8 (b^2 - r^2).$$

En choisissant c qui rende $\beta(0) = 1$ maintenant mettons β dans la forme requise, avec comme support $[-4a, 4a]$. On a également le

Lemme 5.1 : Soit $\widehat{\beta}(r)$ défini comme ci-dessus. Écrivons

$$k = \frac{c}{10080\pi^2 a^8}.$$

Alors pour $t \in [0, a)$, on a

$$\beta(t) = k[\pi^2 b^2 (4832a^7 - 3360a^5 t^2 + 1120a^3 t^4 - 280at^6 + 70t^7) \\ - 1680a^5 + 3360a^3 t^2 - 2100at^4 + 735t^5];$$

pour $t \in [a, 2a)$, on a

$$\beta(t) = k[\pi^2 b^2 (4944a^7 - 784a^6 t - 1008a^5 t^2 - 3920a^4 t^3 + 5040a^3 t^4 \\ - 2352a^2 t^5 + 504at^6 - 42t^7) \\ - 504a^5 - 5880a^4 t + 15120a^3 t^2 - 11760a^2 t^3 + 3780at^4 - 441t^5];$$

pour $t \in [2a, 3a)$, on a

$$\beta(t) = -k[\pi^2 b^2 (2224a^7 - 24304a^6 t + 38640a^5 t^2 - 27440a^4 t^3 + 10640a^3 t^4 \\ - 2352a^2 t^5 + 280at^6 - 14t^7) \\ + 19320a^5 - 41160a^4 t + 31920a^3 t^2 - 11760a^2 t^3 + 2100at^4 - 147t^5];$$

pour $t \in [3a, 4a)$, on a

$$\begin{aligned} \beta(t) = & k[\pi^2 b^2 (32768a^7 - 57344a^6t + 43008a^5t^2 - 17920a^4t^3 + 4480a^3t^4 \\ & - 672a^2t^5 + 56at^6 - 2t^7) \\ & + 21504a^5 - 26880a^4t + 13440a^3t^2 - 3360a^2t^3 + 420at^4 - 21t^5]; \end{aligned}$$

et pour $t \in [4a, \infty)$, on a $\beta(t) = 0$.

A priori, il n'y a pas de garantie que la liste de Strömbergsson des r_j soit complète. Pourtant, nous choisirons b de telle façon qu'il n'y ait pas de $r_j \leq b$ qui soit inconnu (voir §5.3 ci-dessous). Cela rend $h_2(r_j)$ non-positif pour tout r_j inconnu, de telle façon que

$$R(h_2) = \text{Tr}^*(h_2) + \text{Tr}^\dagger(h_2) - M(h_2)$$

où Tr^* est la trace sur les r_j connus et Tr^\dagger est la trace sur le reste. Ainsi

$$B \leq \text{Tr}^*(h_2) - M(h_2) + (D - C) \left(\frac{\beta(t)}{2(\pi t)^2} \right).$$

Procédure

Nous avons comme objectif de calculer rigoureusement

$$\text{Tr}^*(h_2) - M(h_2) + (D - C) \left(\frac{\beta(t)}{2(\pi t)^2} \right).$$

Calcul de $\text{Tr}^*(h_2)$

On a

$$h_2(r) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}_2(t) \cos(2\pi tr) dt = 2 \int_0^{4a} \frac{1 - \beta(t)}{2(\pi t)^2} \cos(2\pi tr) dt + 2 \int_{4a}^{\infty} \frac{\cos(2\pi rt)}{2(\pi t)^2} dt.$$

la première intégrale que nous calculons numériquement pour tout r_j dans notre base de données en utilisant le théorème A.1¹. La seconde intégrale devient

$$\frac{2r}{\pi} \left[\text{Si}(8a\pi r) - \frac{\pi}{2} + \frac{\cos(8a\pi r)}{8a\pi r} \right],$$

que nous calculons à nouveau pour chacun de nos r_j connus. La fonction Si ci-dessus est l'intégrale du sinus

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy.$$

Calcul de $I(h_2)$

On a

$$I(h_2) = -\frac{1}{12\pi} \int_0^{\infty} \frac{\widehat{h}_2'(t)}{\sinh(\pi t)} dt.$$

Quand t est petit, calculer les x_k pour le Théorème A.1. produira un intervalle qui enjambera zéro.

Pour éviter cela, on travaille plutôt avec $\frac{\widehat{h}_2'(t)}{t}$ et on tronque l'expansion de Taylor de $\frac{t}{\sinh(\pi t)}$

1. Se reporter à l'appendice de l'article original <https://arxiv.org/pdf/1710.00603.pdf>.

après quelques termes. Le lemme suivant fournit une borne de l'erreur.

Lemme 5.2 : Soit $N \geq 0$ et $|t| < \sqrt{(2N+4)(2N+5)}$. Alors

$$\left| \frac{\sinh t}{t} - \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right| \leq \frac{t^{2N+2}(2N+4)(2N+5)}{(2N+3)!((2N+4)(2N+5) - t^2)}.$$

Nous pouvons donc calculer l'intégrale sur les intervalles $[0, a]$, $[a, 2a]$, $[2a, 3a]$ et $[3a, 4a]$ avec peu de difficulté. Cela laisse le calcul de l'intégrale sur $[4a, \infty)$ que nous tronquons à partir d'un certain $t_0 > 4a$ en utilisant le lemme suivant :

Lemme 5.3 : Pour $t_0 > 4a$, on a

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} \frac{\widehat{h}'_2(t)}{\sinh(\pi t)} dt \right| \leq \left| \frac{1}{\pi^3 t_0^3} \log \tanh \left(\frac{\pi t_0}{2} \right) \right|.$$

Le calcul de

$$\int_{4a}^{t_0} \frac{1}{2(\pi t)^2 \sinh(\pi t)} dt$$

via le Théorème A.1. nécessite du soin à cause du pôle en $t = 0$.

Calcul de $E(h_2)$

Ceci est plus évident. Nous n'avons besoin que du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 5.4 : Soit $t_0 > 4a$. Alors

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{8 \cosh \pi t} + \frac{2 \cosh \pi t}{3 + 6 \cosh 2\pi t} \right) \widehat{h}_2(t) dt \leq \frac{7 \exp(-\pi t_0)}{24\pi^3 t_0^2} dt.$$

Nous faisons à nouveau quatre intégrations couvrant de $4a$ à $4a \left(3 - \frac{1}{128}\right)^4$ puis nous utilisons le Lemme 5.4 pour borner les derniers termes.

Calcul de $P(h_2)$

Comme reste, on a

$$P(h) = \frac{\widehat{h}(0)}{2\pi} \left(\log \frac{\pi}{2} + 2\gamma \right) - \frac{h(0)}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \log \left(4 \sinh \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right) \widehat{h}'(t) dt.$$

En utilisant MapleTM, on obtient

$$\widehat{h}_2(0) = c \frac{\pi^2 a^2 b^2 - 1}{6a^5 \pi^4}$$

où c est la constante dans l'équation 5.1. Pour calculer $h_2(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}_2(t) dt$, nous estimons les intégrales sur $[0, a]$, $[a, 2a]$, $[2a, 3a]$ et $[3a, 4a]$ en utilisant le théorème A.1.. Nous avons alors

$$\int_{4a}^{\infty} \widehat{h}_2(t) dt = \frac{1}{8a\pi^2}.$$

Pour calculer

$$\int_0^a \log(4 \sinh(\pi t/2)) \widehat{h}'_2(t) dt$$

nous devons gérer la singularité en $t = 0$. Nous calculons

$$\int_0^a (\log(4 \sinh(\pi t/2)) - \log t) \widehat{h}'_2(t) dt + \int_0^a (\log t) \widehat{h}'_2(t) dt,$$

où la seconde intégrale peut être calculée analytiquement pour obtenir

$$\int_0^a (\log t) \widehat{h}'_2(t) dt = c \frac{(195 - 130\pi^2 a^2 b^2) \log a + 72\pi^2 a^2 b^2 - 115}{2880 a^5 \pi^4}.$$

Une fois $4a$ dépassé, nous calculons les trois autres intégrales

$$\sum_{n=0}^2 \int_{4a\alpha^n}^{4a\alpha^{n+1}} \frac{\log\left(4 \sinh\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)}{\pi^2 t^3} dt$$

et bornons les derniers termes en utilisant le lemme suivant :

Lemme 5.5 : Soit $t_0 > 0$. Alors

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} \log\left(4 \sinh\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) \widehat{h}'_2(t) dt + \left(\frac{\pi t_0}{2} + \log 2\right) \widehat{h}_2(t_0) + \frac{\pi}{2} \int_{t_0}^{\infty} \widehat{h}_2(t) dt \right| \leq \log(1 - \exp(-\pi t_0)) \widehat{h}_2(t_0).$$

Calcul de $D\left(\frac{\beta(t)}{2\pi^2 t^2}\right)$

Cela est direct à part les évaluations de $L(1, \chi_d)$. À cette fin, on produit une base de données contenant les nombres de classes $h(d)$ et les unités fondamentales (u et v telles que $u^2 - dv^2 = \pm 4$ avec $u, v \in \mathbb{Z}_{>0}$ et v minimal). La base de données a couvert chaque discriminant fondamental d tel que $dl^2 = t^2 - 4$ avec $t \in [3, 10^5]$. Nous avons utilisé la fonction PARI `qfbclassno`² pour calculer les nombres de classes [4] et l'algorithme PQA dû à Lagrange [24] pour calculer les unités fondamentales. Cela nous autorise alors à calculer $L(1, \chi_d)$ pour ce domaine de d rapidement et rigoureusement en utilisant la formule des nombres de classes de Dirichlet

$$L(1, \chi_d) = \frac{2h(d) \log\left(\frac{u + v\sqrt{d}}{2}\right)}{\sqrt{d}}.$$

Puisque $\beta(t)$ is zero for $t \notin [-4a, 4a]$, on peut prendre

$$a = \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{10^5 + \sqrt{10^{10} - 4}}{2}\right) = 0.916169 \dots$$

sans sortir des données du groupe de classes précalculé. On a également besoin de

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} h\left(\frac{\log n}{\pi}\right),$$

car pour cette valeur de a , on doit sommer sur les nombres premiers et les puissances de premiers ≤ 99991 .

2. `quadclassuint` est plus rapide mais la correction de ses résultats est conditionnée par GRH.

Calcul de $C\left(\frac{\beta(t)}{2\pi^2 t^2}\right)$

Cela se réduit au calcul de l'intégrale finie

$$\int_{-4a}^{4a} \frac{(\cosh(\pi t) - 1)\beta(t)}{2\pi^2 t^2} dt.$$

Le seul problème ici est le calcul quand t est petit, quand on doit recourir au prolongement en série de $t^{-2}(\cosh(t) - 1)$ en utilisant le lemme suivant :

Lemme 5.6 : Soit $N \geq 0$ et $|t| < \sqrt{(2N + 5)(2N + 6)}$. Alors

$$\left| t^{-2}(\cosh(t) - 1) - \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(2n + 2)!} \right| \leq \frac{t^{2N+2}(2N + 5)(2N + 6)}{((2N + 5)(2N + 6) - t^2)(2N + 4)!}.$$

Résultats

$$b = \frac{\sqrt{6\pi^2 - 1}}{2}$$

On prend d'abord $b = \frac{\sqrt{6\pi^2 - 1}}{2}$ puisque par le théorème 11.4 de [17], il n'y a pas de r_j en-dessous de celui-ci. En posant $a = \frac{7505}{8192}$ et en n'utilisant aucun r_j (de telle façon que $\text{Tr}^*(h_2) = 0$), on obtient

$$B \leq 0.272955804771976.$$

$$b = 177.75$$

Une fois qu'on a vérifié le corollaire 1.2 en utilisant la borne supérieure pour B (voir Section 6.3 ci-dessous), on peut prendre $b = 177.75$ et lancer le calcul à nouveau. Cette fois-ci, on obtient

$$B \leq 0.2729558044747431.$$

Le calcul dure environ vingt minutes sur un simple cœur, le temps étant dominé par le calcul de la trace du $r_j \leq 177.75$ connu.

Améliorer davantage la borne pour B

Même si la borne sur B obtenue ci-dessus est plus que suffisante pour nos besoins immédiats, il est possible de l'améliorer encore. Cela peut être réalisé en augmentant l'exposant 8 utilisé dans la définition de β (équation 5.1). La valeur réelle de B ressemble davantage à

$$B = 0.2729558044747424323066650413 \dots,$$

mais nous ne démontrons pas cela ici.

Vérifier le théorème 1.1

Notre vérification s'effectuera en quatre étapes. Nous prouverons d'abord le théorème pour $T \in [100, 27400]$ via l'arithmétique des intervalles et nous utiliserons le résultat pour vérifier le

Corollaire 1.2. Nous vérifierons alors rigoureusement que le Théorème 1.1 est vérifié pour $T \in (1, 100]$ par calcul direct. Alors nous vérifierons, en utilisant à nouveau l'arithmétique des intervalles, que le théorème est vérifié pour $T \in [27\,400, 10^6]$. Finalement, nous montrons qu'il est vérifié pour $T \geq 10^6$.

D'abord, cependant, nous devons définir la fonction φ utilisée dans la Proposition 4.4.

Une forme adéquate pour $\hat{\varphi}$.

Dans [21], Littman montre que l'unique meilleur majorant de type exponentiel 2π à $\max(0, r)$ est

$$V_0(r) = \frac{\cos^2(\pi r)}{\pi^2} \left[r\psi'\left(\frac{1}{2} - r\right) + 1 \right].$$

Cela devrait suggérer que nous posions $\varphi(r) = X\varphi_0(Xr)$, où $\varphi_0(r) = V_0''(r)$, avec la transformée de Fourier

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \hat{\varphi}_0(t) &= \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)}{(k+1)!} \left(\frac{k+1}{k+2} - |t|\right) (2\pi it)^{k+2} \right] \chi_{(-1,1)}(t) \\ &= \left(\frac{|t|}{\operatorname{sinc}(\pi t)} + \frac{(1 - |t|) \cos \pi t}{\operatorname{sinc}^2(\pi t)} \right) \chi_{(-1,1)}(t), \end{aligned}$$

où $\chi_{(-1,1)}$ dénote la fonction caractéristique de $(-1, 1)$. Malheureusement, cela échoue à être C^4 près de $t = 0$, ce qui fait que l'intégrale du côté droit de (4.2) diverge. Nous ajoutons le terme de correction suivant qui nous permet de coller les choses ensemble :

Lemme 6.1 : Soit $X, \delta > 0$, et définissons

$$\hat{\eta}_0(t) = \frac{\pi^2}{4 + \pi^2} \left[\frac{2\pi^2}{3} (1 - |t|)^3 + 4(1 - |t|)(1 - \cos(\pi t)) - \frac{8}{\pi} \sin(\pi|t|) \right] \chi_{(-1,1)}(t)$$

et

$$\hat{V}_1(t) = -\frac{\delta}{48\pi^2 X^3} \left[2\hat{\eta}_0\left(\frac{t}{\delta}\right) + \hat{\eta}_0\left(\frac{t+X}{\delta}\right) + \hat{\eta}_0\left(\frac{t-X}{\delta}\right) \right].$$

Alors

$$V_1(r) = \frac{\cos^2(\pi Xr)}{\pi^2 X} \left[-\frac{1}{12X^2 r^2} + \frac{2 \operatorname{sinc}^2(\pi \delta r) + \operatorname{sinc}^2\left(\pi \delta r + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\pi \delta r - \frac{\pi}{2}\right)}{24\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) X^2 r^2} \right].$$

Nous devons borner le terme faisant intervenir la fonction trigamma. Les éléments suivants suffiront.

Lemme 6.2 : Pour $z > 0$, on a

$$-z\psi'\left(\frac{1}{2} + z\right) + 1 - \frac{1}{12z^2} \in \left[-\frac{7}{120z^4}, 0 \right],$$

et pour $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| -iz\psi'\left(\frac{1}{2} + iz\right) + 1 + \frac{1}{12z^2} \right| \leq \frac{112 + 105\pi}{3840z^4}.$$

Aussi, pour $z = \sigma + it$ avec $\sigma > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| -z\psi'\left(\frac{1}{2} + z\right) + 1 - \frac{1}{12z^2} \right| \leq \frac{7(\sigma + |t|)}{120\sigma^5}.$$

Nous bornons les termes sinc en utilisant [7] [Lemme A.2] :

Lemme 6.3 : Soit $r, \delta > 0$ avec $\delta^2 r^2 \geq \frac{1}{12}$. Alors

$$2 \operatorname{sinc}^2(\pi\delta r) + \operatorname{sinc}^2\left(\pi\delta r + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\pi\delta r - \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{2}{\pi^2 \delta^2 r^2}.$$

Nous pouvons maintenant combiner les éléments ci-dessus pour obtenir :

Proposition 6.4 : Soit $\delta > 0$, $X \geq \delta \sqrt{\frac{7}{20} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)}$. Prenons $\hat{\varphi}_0$ et $\hat{\eta}_0$ définis comme dans l'équation (6.1) et le Lemme 6.1, respectivement. Maintenant définissons

$$\hat{\varphi}(t) = \hat{\varphi}_0\left(\frac{t}{X}\right) + \frac{\delta t^2}{12X^3} \left[2\hat{\eta}_0\left(\frac{t}{\delta}\right) + \hat{\eta}_0\left(\frac{t+X}{\delta}\right) + \hat{\eta}_0\left(\frac{t-X}{\delta}\right) \right].$$

Alors $\hat{\varphi}$ vérifie toutes les hypothèses des propositions 4.4 et 4.3. En particulier,

$$(6.2) \quad V(r) = \frac{\cos^2(\pi X r)}{\pi^2 X} \left[X r \psi'\left(\frac{1}{2} - X r\right) + 1 - \frac{1}{12X^2 r^2} + \frac{2 \operatorname{sinc}^2(\pi\delta r) + \operatorname{sinc}^2\left(\pi\delta r + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\pi\delta r - \frac{\pi}{2}\right)}{24\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)X^2 r^2} \right]$$

est non-négatif pour $r \in \mathbb{R}$.

Vérifier le théorème 1.1 pour $T \in [100, 27400]$

Pour T dans ce domaine, on procède par calcul. On choisit $\delta = 0.1$ et $X = 2.55$ et on les garde fixés tout le temps. Si on calculait tous les termes de la Proposition 4.4 en utilisant l'arithmétique des intervalles, on serait forcé d'utiliser une largeur relativement étroite, et le coût du calcul

$$\int_{\mathbb{R}} [k(T+r) + k(T-r)] F(r) dr$$

en utilisant le théorème A.1. serait prohibitif. Heureusement, la partie qui détermine la largeur maximum avec laquelle on peut s'en tirer est le terme $\cos(2\pi t T)$ dans $D(\cdot)$. Le reste, incluant les intégrales coûteuses, est moins susceptible, et on peut utiliser une largeur entre 2 et 128 dépendant de la taille de T .

Ayant calculé tout le reste avec un intervalle relativement grossier, on calcule alors $D(\cdot)$ de nombreuses fois avec un intervalle beaucoup plus étroit (typiquement environ 2^{-8}). Même là, la plupart des termes constituant $D(\cdot)$ ne dépendent pas de T de telle façon qu'ils peuvent être précalculés une fois et stockés.

Le calcul complet codé en C++ utilisant l'arithmétique des intervalles dure moins d'une heure sur un 16-cœurs de Bluecrystal Phase III [1]. Malgré le calcul préalable, ce temps est dominé par le calcul rigoureux de

$$\int_{\mathbb{R}} [k(T+r) + k(T-r)] F(r) dr.$$

Lemme 6.5 : Le calcul montre que le théorème 1.1 est vérifié pour $T \in [100, 27400]$.

Vérifier le corollaire 1.2

Nous avons maintenant comme objectif de valider notre base de données. En écrivant $\bar{N}(t) = \frac{t^2}{12} - \frac{2t}{\pi} \log \frac{t}{e\sqrt{\frac{\pi}{2}}} - \frac{131}{144}$, nous calculons en utilisant l'arithmétique des intervalles

$$\int_0^{178} \bar{N}(t) dt \in (121\,643.023\,932, 121\,643.023\,933).$$

En utilisant le théorème 1.1, on calcule

$$\int_0^{178} S(t) dt < 0.398\,780$$

de telle façon qu'on a

$$\int_0^{178} N(t) dt < 121\,643.422\,713.$$

Aussi, en utilisant notre base de données (potentiellement incomplète) des r_j , on peut calculer

$$\int_0^{178} N^-(t) dt,$$

où N^- est un minorant de N . Spécifiquement, on a

$$\int_0^{178} N^-(t) dt > 121\,643.206\,595.$$

Maintenant, si des r_j manquaient quelque part dans $(0, 178 - (121\,643.422\,713 - 121\,643.206\,595)) = (0, 177.783\,882)$ alors notre valeur révisée pour $\int N^-(t) dt$ excèderait notre borne supérieure pour $\int N(t) dt$, ce qui est une contradiction.

Vérifier le théorème 1.1 pour $T \in (1, 100]$

Une fois que nous sommes convaincus que notre base de données de zéros est complète, nous pouvons l'utiliser pour confirmer le théorème 1.1 pour de petites valeurs de T par ordinateur.

Lemme 6.6 : Le théorème 1.1 est vérifié pour $T \in (1, 100]$.

Vérifier le théorème 1.1 pour $T \in [27\,400, 10^6]$

Une fois que T est assez grand, nous pouvons gérer $D(\cdot)$ et faire appel à la Proposition 4.5 à la place. On commence avec $T \in [27\,400, 27\,402]$ et on vérifie que le théorème 1.1 est vérifié, et alors on passe à l'intervalle suivant pour T . Après chaque paquet de 20 itérations, on essaie de doubler la largeur de l'intervalle et de continuer. Si à un moment, l'exécution échoue (vraisemblablement parce que notre intervalle pour T a grandi trop et trop rapidement), on divise la largeur de l'intervalle de moitié et on répète. Codé en C++ en utilisant l'arithmétique des intervalles, le calcul dure moins de deux heures sur un simple-cœur (et nous aurions pu le paralléliser de façon triviale). À la fin, la largeur de l'intervalle a augmenté jusqu'à 16 384 et on a le :

Lemme 6.7 : Le théorème 1.1 est vérifié pour $T \in [27\,400, 10^6]$.

Vérifier le théorème 1.1 pour $T \geq 10^6$

Nous regardons maintenant chacune des contributions à notre borne pour $\int S(t)dt$ provenant de la Proposition 4.5. Nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires. Nous supposons que sont utilisées la notation et les hypothèses des propositions 4.4 et 6.4, et nous fixons $\delta = 0.842$ tout au long du processus.

Lemme 6.8 : On a

$$\widehat{F}(0) = \frac{3(\pi^2 + 4)X - 2\pi^2\delta}{72X^3(\pi^2 + 4)}.$$

Lemme 6.9 : Pour $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a

$$F(r) \leq \frac{1}{400X^3r^4}.$$

Lemme 6.10 : On a

$$k(r) \leq \begin{cases} \frac{4}{5} & \text{if } |r| < 2, \\ \frac{|r|}{12} & \text{if } |r| \geq 2. \end{cases}$$

Lemme 6.11 : Pour $T \geq 10$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} [k(T+r) + k(T-r)] F(r) dr \leq \frac{T}{144X^2} - \frac{T\pi^2\delta}{216X^3(\pi^2 + 4)} + \frac{5T^4 + 15T^3 + 258T^2 + 20T + 264}{18000X^3(T-2)^3(T+2)^3}.$$

Lemme 6.12 : On a

$$2 \int_{\mathbb{R}} k(r) F(r) dr \leq \frac{1}{15X^2}.$$

Lemme 6.13 : On a

$$-2 \Re V\left(\frac{i}{2}\right) \leq \cosh^2\left(\frac{\pi X}{2}\right) [0.09752X^{-3} + 0.3731X^{-5}].$$

Lemme 6.14 : On a

$$|2 \Re V(i/2 - T)| \leq \frac{\cosh^2(\pi X/2)}{X^5 T^4} (0.07914 + 0.01183T^{-1}).$$

Nous pouvons maintenant établir nos bornes pour $T \geq 10^6$.

Lemme 6.15 : Soient $S(t)$ et $E(T)$ définis comme dans le théorème 1.1. Alors pour $T \geq 10^6$, on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - E(T) \leq 0.$$

Références

1. ACRC, BlueCrystal Phase 3 User Guide, 2015.
2. R.J. Backlund, Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. 41 (1916), no. 1, 345–375. MR 1555156
3. H. Bateman, Tables of integral transforms, vol. 1, McGraw-Hill, 1954.

4. C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, User's Guide to PARI-GP, 2000.
5. A.R. Booker, Turing and the Riemann hypothesis, *Notices Amer. Math. Soc.* 53 (2006), no. 10, 1208–1211. MR 2263990
6. _____, Turing and the primes, *The once and future Turing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016, pp. 34–52. MR 3644957
7. A.R. Booker, G.A. Hiary, J.P. Keating, Detecting squarefree numbers, *Duke Math. J.* 164 (2015), no. 2, 235–275. MR 3306555
8. A.R. Booker, D.J. Platt, The first 2184 zeros of the Selberg zeta-function for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})\mathbb{H}$, <https://people.maths.bris.ac.uk/~madjp/Datasets/Selberg.txt>.
9. A.R. Booker, A. Strömbergsson, Numerical computations with the trace formula and the Selberg eigenvalue conjecture, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2007 (2007), no. 607, 113–161.
10. A.R. Booker, A. Strömbergsson, A. Venkatesh, Effective computation of Maass cusp forms, *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 71281, 34. MR 2249995
11. J. P. Gram, Note sur les zéros de la fonction $\xi(s)$ de Riemann, *Acta Math.* 27 (1903), no. 1, 289–304. MR 1554986
12. D.E.G. Hare, Computing the principal branch of log-Gamma, *J. Algorithms* 25 (1997), no. 2, 221–236.
13. D.A. Hejhal, On eigenfunctions of the Laplacian for Hecke triangle groups, *Emerging applications of number theory (Minneapolis, MN, 1996)*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 109, Springer, New York, 1999, pp. 291–315. MR 1691537
14. _____, *The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$* , vol. 2, Springer, 2006.
15. _____, *The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$* , vol. 1, Springer, 2006.
16. J.I. Hutchinson, On the roots of the Riemann zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 27 (1925), no. 1, 49–60. MR 1501297
17. H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, vol. 53, American Mathematical Society Providence, 2002.
18. F. Johansson, Arb : a C library for ball arithmetic, *ACM Communications in Computer Algebra* 47 (2013), no. 4, 166–169.
19. J. Jorgenson, Lejla Smajlović, H. Then, On the distribution of eigenvalues of Maass forms on certain moonshine groups, *Math. Comp.* 83 (2014), no. 290, 3039–3070. MR 3246823
20. X. Li, P. Sarnak, Number variance for $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, 2004, <http://publications.ias.edu/sites/default/files/SarnakNumberPaper04.pdf>.

21. F. Littmann, One-sided approximation by entire functions, *Journal of Approximation Theory* 141 (2006), no. 1, 1–7.
22. P. Molin, *Intégration numérique et calculs de fonctions L* , Ph.D. thesis, Université de Bordeaux I, 2010.
23. _____, *L'intégration numérique par la méthode double-exponentielle*, HAL (2010), hal-00491561v2 48 pages.
24. I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery, *An introduction to the theory of numbers*, John Wiley & Sons, 2008.
25. G. Steil, Eigenvalues of the Laplacian and of the Hecke operators for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, Tech. Report DESY-94-028, P00022028, 1994.
26. H. Then, Large sets of consecutive Maass forms and fluctuations in the Weyl remainder, (2012).
27. E.C. Titchmarsh, The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Royal Soc. Lond.* 151 (1935), 234–255.
28. A.M. Turing, Some calculations of the Riemann zeta-function, *Proc. London Math. Soc.* (3) 3 (1953), 99–117. MR 0055785
29. J.D. Vaaler, Some extremal functions in Fourier analysis, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 12 (1985), no. 2, 183–216. MR 776471
30. A. Voros, Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987), no. 3, 439–465.