Faculté des Sciences de Paris
Séminaire P. DUBREIL H.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
ALGEBRE et THEORIE DES NOMBRES
Année 1957/58

TREILLIS LOCAUX

JEAN BENABOU

16 décembre 1957

1. Généralités.

INTRODUCTION. - Soit E un espace topologique, $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts ordonné par inclusion. Pour cet ordre, $\mathcal{O}$ est un treillis complet d'élément maximum E et d'élément minimum Φ dans lequel l'union et l'intersection d'une famille quelconque d'éléments sont données par :

$$\bigvee_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I} O_i \quad \text{et} \bigwedge_{i\in I} O_i = \overbrace{(\bigcap_{i\in I} O_i)}^{\circ} = \bigcup\{O \ : \ O \in \mathcal{O}, O \subset \bigcap_i O_i\}$$

(les symboles $\bigcup$ et $\bigcap$ sont réservés à la réunion et l'intersection ensemblistes et : A étant un sous-ensemble quelconque de E on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A) ; en particulier l'intersection finie dans $\mathcal{O}$ coïncide avec l'intersection ensembliste. Cela montre que $\mathcal{O}$ vérifie la loi de distributivité générale :

$$O \wedge (\bigvee_{i\in I} O_i) = \bigvee_{i\in I} (O \wedge O_i) \tag{1}$$

le treillis des ouverts jouant un rôle considérable dans l'étude de la topologie de E, on est conduit à étudier de façon générale des treillis distributifs complets vérifiant (1) (treillis locaux). On s'aperçoit alors que :

1° la plupart des définitions et des résultats de topologie se conservent dans de tels treillis ;

2° il existe des treillis locaux qui ne sont pas isomorphes à des treillis d'ouverts.

DÉFINITION 1. - Un treillis local est un treillis complet $\bigwedge$ vérifiant : $x \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} (x \wedge x_i)$ pour tout $x \in \bigwedge$ et toute famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $\bigwedge$.

De la définition résulte que $\bigwedge$ est distributif, possède un élément maximum noté e et un élément minimum noté 0.

Un tel treillis s'appelle dans la littérature ([1] p.147) treillis distributif complet et pseudo-complémenté. En effet tout $x \in \bigwedge$ possède un complément x^* vérifiant $x \wedge y = 0 \iff y < x^*$. Il suffit de remarquer que la loi de distributivité implique que $\bigvee\{y \ : \ y \wedge x = 0\}$ est le complément unique cherché.

Retranscription en Latex : Denise Vella-Chemla, février 2022

Théorème 1 (Glivenko). - L'ensemble ordonné $\bigwedge^*$ des pseudo-compléments est une algèbre de Boole complète et l'application : f : a $\mapsto a^{**}$ de $\bigwedge$ dans $\bigwedge^*$ respecte les intersections finies et unions quelconques.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [1] ou dans [2].

Notons que l'intersection dans $\bigwedge^*$ est la même que dans $\bigwedge$, mais que l'union est donnée par :

$$\bigvee^{\wedge^*} x_\alpha^{**} = (\bigwedge_{\wedge} x_\alpha^*)^*.$$

Exemples de treillis locaux :

1° Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le treillis des ouverts d'un espace topologique est local.

2° Appliquons le théorème de Glivenko dans ce cas particulier : cf [2]. O étant un ouvert quelconque, $O^* = (\overset{\circ}{\complement O})$ mais $\complement O$ est un fermé quelconque. Donc les intérieurs des fermés forment un treillis de Boole complet (qui est toujours un treillis local). Le treillis ainsi construit à partir de R^n n'a aucun point.

3° Soit E un espace localement compact, μ une mesure sur E. L'algèbre de Boole des ensembles mesurables à un ensemble de mesure nulle près est complète donc locale.

4° L'ensemble des congruences dans un treillis quelconque forme un treillis local (cf [1] p. 24).

5° L'ensemble des filtres d'un treillis distributif, ordonné par inclusion est un treillis local [4] ou [1] (exercice).

2. Plongement d'un demi-treillis dans un treillis local.

Soit L un ensemble ordonné, tel que toute famille finie d'éléments de L possède une intersection. On dira qu'une famille $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'éléments de L a une $\bigvee^*$ si les $\{x_\alpha\}$ ont une union vérifiant $x \wedge (\bigvee_\alpha x_\alpha) = \bigvee_\alpha (x \wedge x_\alpha)$. On note alors cette union $\bigvee^*$. Un sous-ensemble K de L est un <u>cône</u> si : $(x \in K$ et $y < x) \Rightarrow y \in K$. Un sous-ensemble $\mathcal{J}$ de L est un $\bigvee^*$-idéal (plus brièvement idéal) si : $(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset I$ *et* $\bigvee^* x_\alpha$ existe$) \Rightarrow \bigvee^* x_\alpha \in I$ et en outre $\mathcal{J}$ est un cône.

Proposition 1. L'ensemble $\mathcal{J}$ des idéaux de L est un treillis complet pour l'ordre induit par l'inclusion. Dans $\mathcal{J}$, l'intersection coïncide avec l'intersection des ensembles. En effet

i. L est un idéal et $L \supset I$ quel que soit $I \in \mathcal{J}$;

ii. si $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{J}, \bigcap_\alpha I_\alpha \in \mathcal{J}$.

Notons que l'union dans $\mathcal{J}$ d'une famille d'idéaux est donnée par :

$$\bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha = \bigcap \{I \ : \ I \in \mathcal{J}, \quad I \supset I_\alpha \quad \text{pour tout } \alpha\}.$$

Lemme 1. - Soit $A \subset L$, la correspondance $A \to \overline{A} = \bigcap \{I \ : I \in \mathcal{J}, I \supset A\}$ est une fermeture ; on vérifie immédiatement en effet que : $A \subset \overline{A}, \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$.

Nous allons donner une construction de $\overline{A}$. Soit $\Gamma(A)$ le sous-ensemble de L obtenu on adjoignant à A tout élément de L inférieur à au moins un élément de A et toute $\bigvee^*$ de tels éléments. L'application $A \to \Gamma(A)$ de $\mathcal{P}(L)$ dans $\mathcal{P}(L)$ vérifie : $\Gamma(A) \supset A$ et $(A \supset B) \Rightarrow \Gamma(A) \supset \Gamma(B)$. Pour tout ordinal α, définissons A_α par induction :

$$A_0 = A \;\; ; \;\; A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha) \;\; ; \;\; A_\tau = \bigcup_{\alpha<\tau} A_\alpha \;\; \text{(si } \tau \text{ est un ordinal limite).}$$

La suite transfinie des A_α devient stationnaire et sa limite $\widetilde{A}$ vérifie $\Gamma(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$. Si I est un idéal contenant A, I contient tous les A_α donc $I \supset \widetilde{A}$ donc $\bigcap\{I \;:\; I \in \mathcal{J}, \mathcal{J} \supset A\} = \overline{A} \supset \widetilde{A}$. Mais $\widetilde{A}$ est lui-même un idéal contenant A donc $\widetilde{A} = \overline{A}$.

Lemme 2. A et B étant deux sous-ensembles de L, si on pose

$$A \wedge B = \{a \wedge b \;:\; a \in A, b \in B\}$$

on a :

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Démontrons d'abord que si $A \wedge B \subset \overline{C}$ alors $\overline{A} \wedge B \subset \overline{C}$.

i. $A_0 \wedge B = A \wedge B \subset \overline{C}$ par hypothèse.

ii. si $A_\alpha \wedge B \subset \overline{C}, A_{\alpha+1} \wedge B \subset \overline{C}$; en effet, soit $x \in A_{\alpha+1} \wedge B$: $x = a \wedge b$ où $b \in B$ et $a = \bigvee_i^* x_i$, chaque x_i étant inférieur à un $a_i \in A_\alpha$ donc $x = (\bigvee_i^* x_i) \wedge b = \bigvee_i^*(x_i \wedge b)$, or $x_i \wedge b < a_i \wedge b \in A_\alpha \wedge B \subset \overline{C}$ donc $x_i \wedge b \in \overline{C}$ et $\bigvee^*(x_i \wedge b) = x \in \overline{\overline{C}} = \overline{C}$.

iii. Soit τ un ordinal limite ; si pour tout $\alpha < \tau, A_\alpha \wedge B \subset \overline{C}$, on a
$A_\tau \wedge B = \left[\bigcup_{\alpha<\tau} A_\alpha\right] \wedge B = \bigcup_{\alpha<\tau}(A_\alpha \wedge B) \subset \overline{C}$;

la propriété est donc vraie pour tout ordinal, donc $\overline{A} \wedge B \subset \overline{C}$, l'intersection étant commutative $A \wedge B \subset \overline{C} \longrightarrow A \wedge \overline{B} \subset \overline{C}$ donc aussi $\overline{A} \wedge \overline{B} \subset \overline{C}$. Pour $\overline{C} = \overline{A \wedge B}$, on a $A \wedge B \subset \overline{A \wedge B}$ donc $\overline{A} \wedge \overline{B} \subset \overline{A \wedge B}$.

D'autre part $\overline{A}$ et $\overline{B}$ étant des cônes, $\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

De $\overline{A} \wedge \overline{B} \supset A \wedge B$, on déduit $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \wedge B}$ d'où l'égalité cherchée.

Théorème 2. L'ensemble $\mathcal{J}$ des idéaux est un treillis local.

Vérifions la distributivité générale $I \bigwedge_{\mathcal{J}} \left[\bigwedge_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha\right] = \bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} (I \bigwedge_{\mathcal{J}} I_\alpha)$.

i. $\bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha = \overline{\bigcup_\alpha I_\alpha}$; en effet $\overline{\bigcup_\alpha I_\alpha} \supset I_\alpha$ pour tout α et est un idéal donc $\overline{\bigcup_\alpha I_\alpha} \supset \bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha$; d'autre part $\bigcup_\alpha I_\alpha \subset \bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha$ donc $\overline{\bigcup_\alpha I_\alpha} \subset \overline{\bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha} = \bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha$.

ii. $I \bigwedge_{\mathcal{J}} \left[\bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha\right] = I \bigcap \left[\overline{\bigcup_\alpha I_\alpha}\right] = \overline{I \wedge [U_\alpha I_\alpha]}$ (cf Lemme 2) mais I et $U_\alpha I_\alpha$ étant des cônes, $I \wedge \left[\bigcup_\alpha I_\alpha\right] = I \bigcap \left[\bigcup_\alpha I_\alpha\right] = \bigcup_\alpha (I \cap I_\alpha)$ donc

$$I \bigwedge_{\mathcal{J}} \left[\bigwedge_\alpha^{\mathcal{J}} I_\alpha\right] = \overline{\bigcup_\alpha (I \cap I_\alpha)} = \bigvee_\alpha^{\mathcal{J}} (I \bigwedge_{\mathcal{J}} I_\alpha)$$

.

NB. - Quand plusieurs treillis interviennent en même temps et qu'il peut y avoir confusion, on note l'intersection et la réunion dans un treillis T : $\bigwedge\limits_T x_\alpha$ et $\bigvee\limits^T x_\alpha$; si elles sont en outre distributives, on les note $\bigwedge\limits_T{}^* x_\alpha$ et $\bigvee\limits^T{}^* x_\alpha$.

Théorème 3. - La correspondance $f \ : \ x \to I(x) = \{y \ : \ y \in L, y < x\}$ est un isomorphisme de L sur un sous-ensemble de $\mathcal{J}$, qui respecte les intersections quelconques et les unions distributives de L, l'image de L engendre $\mathcal{J}$.

i. Si $x = \bigwedge\limits_L x_i, x < x_i$ pour tout $i \implies x \in \bigcap\limits_i I(x_i) = \bigwedge\limits_{\mathcal{J}} I(x_i)$ donc $I(x) \subset \bigwedge\limits_L I(x_i)$; d'autre part, si $y \in \bigwedge\limits_L I(x_i), y < x_i$ pour tout i donc $y < x$ et $y \in I(x)$ et $\bigwedge\limits_L I(x_i) \subset I(x)$ d'où l'égalité.

ii. Si $x = \bigvee^* x_i, x_i \in \bigcup\limits_i I(x_i) \implies x \in \overline{\bigcup\limits_i I(x_i)} = \bigvee\limits_i^{\mathcal{J}} I(x_i)$ donc $I(x) \subset \bigvee\limits^{\mathcal{J}} I(x_i)$ d'autre part, chaque x_i étant $< x, I(x_i) \subset I(x)$ pour tout i donc $\bigvee\limits^{\mathcal{J}} I(x_i) \subset I(x)$.

iii. Si L possède un minimum 0 (resp. un maximum e) $I(0) = \{0\}$ est minimum dans $\mathcal{J}$ (resp. $I(e) = L$ est maximum dans L) ;

iv. Soit I un idéal quelconque, $I = \bigvee\limits^{\mathcal{J}} \{I(x) \ ; \ x \in I\}$ or les I(x) sont des images d'éléments de L, lesquels forment donc une base de $\mathcal{J}$ (pour les unions. quelconques).

3. Plongement d'un treillis local dans une algèbre de Boole.

On sait que tout treillis distributif peut être plongé avec conservation des unions et intersections finies dans un treillis d'ensembles, c'est-à-dire une algèbre de Boole. Nous allons montrer que ce résultat peut être amélioré on abandonnant une représentation ensembliste et en remplaçant l'algèbre de Boole des sous-ensembles d'un ensemble par une algèbre de Boole complète. Une telle immersion a été traitée [3] dans le cas où L vérifie la propriété de disjonction de Stone. Si $\bigwedge$ est un treillis distributif, on construira un plongement repectant les intersections finies et les unions distributives quelconques. En particulier si $\bigwedge$ est local, l'immersion conservera toutes les unions puisqu'elles étaient distributives. En considérant $\bigwedge$ comme un treillis d'"ouverts" d'un "espace sans points", l'algèbre de Boole construite est l'algèbre de Boole engendrée par les "ouverts" et les "fermés" de l'"espace sans points".

$\bigwedge$ sera dans la suite un treillis distributif.

Soit $\bigwedge^*$ l'ensemble des couples (a, a') (a et $a' \in \bigwedge$) ordonné par :

$$(a, a') < (b, b') \iff a < a' \vee b \quad \text{et} \quad a \wedge b' < a'.$$

Lemme 3. La relation $<$ est un préordre sur $\bigwedge^*$.

i. $(a, a') < (a, a')$ car $a < a' \vee a$ et a$\wedge a' < a'$.

ii. $(a, a') < (b, b')$ et $(b, b') < (c, c')$ entraînent :
$$a < a' \vee b \ ; \ a \wedge b' < a' \ ; \ b < b' \vee c \ ; \ b \wedge c' < b'$$

d'où on tire :

$$a < a' \vee b < a' \vee b' \vee c$$

donc

$$a = (a \wedge a') \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge c) < a' \vee (a \wedge b') \vee c = a' \vee c$$
$$a' > a \wedge b' > a \wedge b \wedge c'$$

et aussi

$$a > a \wedge a' \wedge c' \implies a' > (a \wedge c' \wedge a') \vee (a \wedge c' \wedge b)$$
$$a' > (a \wedge c') \wedge (a' \vee b) = a \wedge c'$$

C.Q.F.D.

Le quotient $\bigwedge'$ de $\bigwedge^*$ par la relation $(a,a') \sim (b,b') \iff (a,a') < (b,b')$ et $(a,a') > (b,b')$ est alors ordonné par la relation quotient, la classe de (a,a') dans $\bigwedge'$ sere notée $[a,a']$.

Lemme 4. - Si $\bigwedge\limits_{\wedge}^{*} a_i$ et $\bigvee\limits_{T}^{*} a_i$ existent alors $\bigwedge\limits_{\wedge'} [a_i, a_i']$ existe et est égale à $\left[\bigwedge\limits_{\wedge}^{*} a_i, \overset{\wedge}{\bigvee}^{*} a_i'\right]$.

En effet quel que soit i : $\bigwedge\limits_{T}^{*} a_i < \left(\bigvee\limits_{T}^{*} a_i'\right) \wedge a_i$ et $\left(\bigwedge\limits_{T}^{*} a_i\right) \wedge a_i' < \bigvee\limits_{T}^{*} a_i'$ donc $\left[\bigwedge^* a_i, \bigvee^* a_i'\right] <$ $[a_i, a_i']$ pour tout i.

Supposons d'autre part que $[x,x'] < [a_i, a_i']$ quel que soit i ; alors

$$\left.\begin{array}{l} x < x' \vee a_i \implies x < \bigwedge\limits_i^{*} (x' \vee a_i) = x' \vee (\bigwedge\limits_i^{*} a_i) \\ x \wedge a_i' < x' \implies \bigvee^* x \wedge a_i' = x \wedge (\bigvee^* a_i') < x' \end{array}\right\} \text{donc } [x,x'] < [\bigwedge^* a_i, \bigvee^* a_i']$$

Remarquons que dans $\bigwedge$, toute union finie et toute intersection finie sont distributives donc $\bigwedge'$ est un demi-treillis pour l'intersection.

Lemme 5. - Dans $\bigwedge'$

i. $[x,x] = [0,0]$ quel que soit $x \in \bigwedge$ et c'est l'élément minimum ;

ii. $[e,0]$ est l'élément maximum de $\bigwedge'$;

iii. pour tout $a \in \bigwedge, [a,0]$ et $[e,a]$ sont complémentaires dans $\bigwedge'$

i. et ii. se vérifient trivialement en revenant à la définition de l'ordre de $\bigwedge'$;
iii. $[a,0] \wedge [e,a] = [a,a]$ (lemme 4) et $[a,a] = [0,0]$ i.

D'autre part supposons $[x,x'] > [e,a]$ et $[x,x'] > [a,0]$. On a : $a < x$ donc $a \vee x = x$; d'autre part, $e < a \vee x$ donc $a \vee x = x = e$.

En outre $e \wedge x' = x' < a$ et $a \wedge x' < 0$ donc $x' = 0$ et $[x,x'] = [e,0]$; en outre, $[e,a] \vee [a,0]$ est dans $\wedge'$ une union distributive. Il faut vérifier que pour tout $[x,x'] \in \bigwedge'$, on a :

$$[x,x'] = ([x,x'] \wedge [a,0]) \vee ([x,x'] \wedge [e,a])$$

c'est-à-dire que

$$[x,x'] = [x \wedge a, x'] \vee [x, a \vee x']$$

(On ne sait pas que l'union écrite au second membre de l'équation existe dans $\bigwedge'$ mais on sait déjà que $[x,x']$ est supérieur à chacun des deux termes de cette union, il suffit donc de démontrer que si $[y,y'] \in \bigwedge'$ est supérieur à ces deux termes, il est aussi supérieur à $[x,x']$ c'est-à-dire que : $x < x' \vee y$ et $x \wedge y' < x'$.

$$[a \wedge x, x'] < [y,y'] \iff \left\{\begin{array}{ll} (1) & a \wedge x < x' \vee y \\ (2) & a \wedge x \wedge y' < x'. \end{array}\right.$$

$$[x, a \vee x'] < [y,y'] \iff \left\{\begin{array}{ll} (3) & x < a \vee x' \vee y \\ (4) & x \wedge y' < a \vee x'. \end{array}\right.$$

L'inégalité (3) implique : $x = x \wedge (a \vee x' \vee y) = (x \wedge a) \vee [x \wedge (x' \vee y)]$ et d'après : (1) on a $(x \wedge a) \vee [x \wedge (x' \vee y)] < (x' \vee y) \vee [x \wedge (x' \vee y)] = x' \vee y$ donc $x < x' \vee y$.

D'autre part on a : $x' > x' \wedge x \wedge y'$.
et d'après l'inégalité (2) : $x' > (a \wedge x \wedge y')$ donc $x' > (a \wedge x \wedge y') \vee (x' \wedge x \wedge y')$ d'où $x' > (a \vee x') \wedge (x \wedge y')$ qui n'est autre que : $x \wedge y$ d'après l'inégalité (4).

Théorème 4. - L'application : $a \to [a, 0]$ est un isomorphisme de $\bigwedge$ sur un sous-ensemble de $\bigwedge'$ qui transforme le maximum (resp. le minimum de $\bigwedge$) en maximum (minimum) de $\bigwedge'$. Toute intersection distributive de $\bigwedge$ devient intersection dans $\bigwedge'$ et toute union distributive de $\bigwedge$ devient union distributive dans $\bigwedge'$.

i. $(a, 0) < (b, 0) \iff a < 0 \vee b$ et $a \wedge 0 < 0$ donc $\iff a < b$
donc $[a, 0] < [b, 0] \iff a < b$;

ii. si les $a_i$ont une $\bigwedge^*$, d'après le lemme 4 :
$$\bigwedge_{\wedge}[a_i, 0] = [\bigwedge_{\wedge}^* a_i, 0].$$

iii. a, a' et b étant trois éléments quelconques de $\bigwedge$, on a :
$a < b \implies [a, a'] < [b, a']$ (immédiat) ; en particulier, si les $a_i \in \bigwedge$ ont une $\bigvee^*$, on a pour tout i : $[a_i, a'] < [\bigvee^* a_i, a']$.

Soit d'autre part $[x, x'] > [a_i, a']$ pour tout i alors :
$$a_i < x \vee a' \implies \bigvee^* a_i < a' \vee x$$

de même
$$a_i \wedge x < a' \implies \bigvee^*(a_i \wedge x) < a'$$

donc
$$x \wedge \left(\bigvee^* a_i\right) < a'$$

et
$$\left[\bigvee^* a_i, a'\right] < [x, x']$$

On voit déjà que :
$$\bigvee_{\wedge'}[a_i, a'] = [\bigvee_{\wedge}^* a_i, a']$$

en particulier pour $a' = 0$
$$\bigvee_{\wedge'}[a_i, 0] = [\overset{*}{\bigvee_{\wedge}} a_i, 0].$$

Soit maintenant $[b, b']$ quelconque dans $\bigwedge'$
$$\begin{aligned}[b, b'] \wedge \left\{\bigvee_{\wedge'}[a_i, 0]\right\} &= [b, b'] \wedge [\bigvee^* a_i, 0] = [b \wedge (\bigvee^* a_i), b'] = [\bigvee^*(b \wedge a_i), b'] \\ &= \bigvee_{T'}[b \wedge a_i, b'] = \bigvee_{T'}\{[b, b'] \wedge [a_i, 0]\}\end{aligned}$$
(La deuxième égalité, étant conséquence du lemme 4) donc l'union des $[a_i, 0]$ est bien distributive.

Remarquons en outre que dans $\bigwedge'$ on a
$$[a, a^*] = [a, 0] \wedge [e, a'].$$

Construction de l'algèbre de Boole : $\bigwedge'$ est un demi-treillis pour l'intersection, on peut donc le plonger dans un treillis local M par une application biunivoque Φ vérifiant $\Phi(\bigwedge_{\wedge'} \lambda_\alpha) = \bigwedge_M \Phi(\lambda_\alpha)$ et $\Phi(\bigvee_{A'}^* \lambda_\alpha) = \bigvee_M^* \Phi(\lambda_\alpha)$. Tout élément μ de M est de la forme $\mu = \overset{*}{\bigvee_M} \Phi(\lambda_\alpha)$ pour une famille $\{\lambda_\alpha\} \subset \bigwedge'$. Soit $M^{**} = B$ l'algèbre de Boole des pseudo-compléments de M et φ l'application $M \to B$ définie par $\varphi(\mu) = \mu^{**}$.

Théorème 5. - L'application $p = \varphi \circ \Phi \circ f$ de $\bigwedge$ dans B est une application biunivoque de $\bigwedge$ dans une algèbre de Boole complète vérifiant :

$$p(0_\wedge) = 0_B \;\; ; \;\; p(e_\wedge) = e_B \;\; ; \;\; p(\textstyle\bigwedge^*_{1\leq i\leq n} \lambda_i) = \bigwedge\limits_B{}^* p(\lambda_i) \;\; ; \;\; p(\bigvee\limits_\wedge{}^* \lambda_\alpha) = \bigvee\limits_B{}^* p(\lambda_\alpha);$$

en outre tout élément de B est l'union, dans B, d'images par p d'éléments de $\bigwedge$ ou de complémentaires de tels éléments.

Les quatre égalités se vérifient immédiatement (composition d'applications qui respectont les intersections finies et unions distributives).

Si $x \neq y$ dans $\bigwedge \implies [x,0] \neq [y,0]$ et $\Phi([x,0]) \neq \Phi([y,0])$ car Φ est biunivoque, en outre $[x,0]$ et $[y,0]$ ont des complémentaires dans $\bigwedge'$ et les deux unions $[x,0] \vee [e,x]$ et $[y,0] \vee [e,y]$ qui sont distributives dans $\bigwedge'$ sont respectées par Φ donc $\Phi([x,0]) \bigvee\limits_M \Phi([e,x]) = e_M$ et

$$\Phi([x,0]) \bigwedge\limits_M \Phi([e,x]) = \Phi([x,0] \bigwedge\limits_{\wedge'} [e,x]) = \Phi(0_{\wedge'}) = 0_M$$

de même pour $[y,0]$ et $[e,y]$. Donc $\Phi[x,0]$ et $\Phi[y,0]$ ont des complémentaires dans M. Alors $[\Phi([x,0])]^{**} = \varphi(\Phi([x,0]) = \Phi([x,0])$ donc $p(x) \neq p(y)$ et p est bien injective.

Enfin tout élément de $\bigwedge'$ est de la forme $f(a) \wedge f^*(a')$ et tout élément de M est union d'images de tels éléments.

Corollaire. - Si $\bigwedge$ était déjà un treillis local, le théorème 5 montre que le plongement respecte les intersections finies et les unions quelconques car elles étaient toutes distributives.

Bibliographie

[1] Birkhoff (Garrett). - Lattice theory. New York, American mathematical Society, 1948 (American mathematical Society Colloquium Publications n° 25).

[2] Lesieur (Léonce). - Les treillis en topologie I et II, Séminaire Châtelet Dubreil Algèbre et théorie des nombres, t. 7, 1953/54.

[3] Lesieur (Léonce). - Sur un problème d'immersion, Proc. internat. Congress Math., Amsterdam 1954 vol. 2 : Short Lectures.- Groningen, Noordhoff et Amsterdam, North-Holland publishing 1954; p. 40-41.

[4] Stone (M. H.). - Applications of the theory of Boolean rings of general topology, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 375-481.