Sur le paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen

J. S. Bell
Département de Physique
Université du Wisconsin
Madison, Wisconsin

I. Introduction

Le paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen [1] a été avancé comme un argument selon lequel la mécanique quantique ne pourrait pas être une théorie complète mais qu'il faudrait lui ajouter des variables supplémentaires. Ces variables additionnelles étaient destinées à restaurer dans la théorie la causalité et la localité [2]. Dans cette note, cette idée sera formulée mathématiquement et mon montrera qu'elle est incompatible avec les prédictions statistiques de la mécanique quantique. C'est la contrainte de localité, ou plus précisément la contrainte que le résultat d'une mesure sur un système ne soit pas affectée par des opérations sur un système distant avec lequel il a interagi dans le passé, qui crée la difficulté essentielle. Il y a eu des tentatives [3] pour montrer que même sans de telles contraintes de séparabilité ou localité, aucune interprétation à "variables cachées" de la mécanique quantique n'est possible. Ces tentatives ont été examinées ailleurs [4] et "found wanting". De plus, une interprétation à variables cachées de la théorie quantique élémentaire [5] a été explicitement construite. Cette interprétation particulière a en effet une structure grossièrement non locale. Cela est caractéristique, selon le résultat qui sera prouvé ici, de n'importe quelle théorie qui reproduit exactement les prédictions de la mécanique quantique.

II. Formulation

Avec l'exemple défendu par Bohm et Aharonov [6], l'argument EPR est le suivant. Considérons un état à un spin formé en quelque sorte d'une paire de particules de spins un demi se déplaçant librement dans des directions opposées. Des mesures peuvent être effectuées, disons par les aimants de Stern-Gerlach, sur des composants choisis des spins $\vec{\sigma_1}$ et $\vec{\sigma_2}$. Si la mesure du composant $\vec{\sigma_1}.\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unité, fournit la valeur $+1$ alors, selon la mécanique quantique, la mesure de $\vec{\sigma_2}.\vec{u}$ doit fournir la valeur -1 et vice versa. Maintenant nous faisons l'hypothèse [2], et il semble, du moins cela vaut la peine d'être considéré, que si les deux mesures sont effectuées en des endroits éloignés l'un de l'autre l'orientation d'un aimant n'influence pas le résultat obtenu avec l'autre. Puisque l'on peut prédire à l'avance le résultat de la mesure de n'importe quel composant choisi de $\vec{\sigma_2}$, en mesurant précédemment le même composant de $\vec{\sigma_1}$, il s'ensuit de cela que le résultat de n'importe quelle mesure doit effectivement être prédéterminé. Puisque la fonction d'onde de mécanique quantique initiale ne détermine pas le résultat d'une mesure individuelle, cette prédétermination implique la possibilité d'une spécification plus complète de l'état.

Effectuons cette spécification complète au moyen du paramètre λ. Cela n'a pas d'importance pour la suite que λ dénote une variable unique ou bien un ensemble de variables, ou même un ensemble de fonctions, et que les variables soient discrètes ou continues. Pourtant, nous écrivons comme si λ

en congé sabbatique du SLAC et du CERN.
(Reçu le 4 Novembre 1964).
Travail financé en partie par la Commission à l'énergie atomique américaine.
référence de l'article : Physics Vol. 1, No. 3, p. 195-200, 1964. Imprimé aux États-Unis.
Traduction : Denise Vella-Chemla, Juillet 2021

était un paramètre unique continu. Le résultat A de la mesure de $\vec{\sigma_1}.\vec{u}$ est alors déterminé par $\vec{u}$ et λ, et le résultat B de la mesure $\vec{\sigma_2}.\vec{v}$ dans la même instanciation est déterminé par $\vec{v}$ et λ, et

$$A(\vec{u}, \lambda) = \pm 1, \qquad B(\vec{v}, \lambda) = \pm 1. \tag{1}$$

La supposition cruciale [2] est que le résultat B pour la particule 2 ne dépend ni de la valeur $\vec{u}$, de l'aimant pour la particule 1, ni de A sur $\vec{v}$.

Si $\rho(\lambda)$ est la distribution de probabilité de λ alors la valeur attendue du produit des deux composants $\vec{\sigma_1}.\vec{u}$ et $\vec{\sigma_2}.\vec{v}$ est

$$P(\vec{u}, \vec{v}) = \int \mathrm{d}\lambda \rho(\lambda) A(\vec{u}, \lambda) B(\vec{v}, \lambda) \tag{2}$$

Elle devrait être égale à la valeur attendue en mécanique quantique, qui pour l'état unique est

$$\langle \vec{\sigma_1}.\vec{u} \;\; \vec{\sigma_2}.\vec{v} \rangle = -\vec{u}.\vec{v}. \tag{3}$$

Mais on montrera que cela n'est pas possible.

On peut préférer une formulation dans laquelle les variables cachées appartiennent à deux ensembles, avec A dépendant de l'un et B dépendant de l'autre ; cette possibilité est contenue dans la possibilité ci-dessus, puisque λ représente n'importe quel nombre de variables et que les dépendances là-dessus de A et B ne sont pas restreintes. Dans une théorie physique complète du type envisagé par Einstein, les variables cachées auraient une signification dynamique et des lois de mouvement ; nos λ peuvent être pensés comme les valeurs initiales de ces variables à un instant convenable.

III. Illustration

La preuve du résultat principal est assez simple. Avant de la donner, pourtant, un certain nombre d'illustrations peuvent servir à la mettre en perspective.

Premièrement, il n'y a pas de difficulté à utiliser une variable cachée pour compter les mesures de spin d'une particule simple. Supposons que nous ayons une particule de demi spin dans un état pur de spin avec une polarisation dénotée par un vecteur unitaire $\vec{p}$. Soit une variable cachée qui est (par exemple) un vecteur unitaire $\vec{\lambda}$ avec une distribution de probabilité uniforme sur l'hémisphère $\vec{\lambda} \,.\, \vec{p} > 0$. Spécifions que le résultat de la mesure d'un composant $\vec{\sigma} \,.\, \vec{u}$ est

$$\text{sign } \vec{\lambda} \,.\, \vec{u'}, \tag{4}$$

où $\vec{u'}$ est un vecteur unité dépendant de $\vec{u}$ et $\vec{p}$ d'une manière à spécifier, et que la fonction signe est $+1$ ou -1 selon le signe de son argument. Effectivement, cela laisse le résultat indéterminé quand $\lambda \,.\, a' = 0$, mais comme la probabilité de cela est zéro, nous ne ferons pas de prescriptions particulières pour elle. En calculant la moyenne sur $\vec{\lambda}$, la valeur attendue est

$$\langle \vec{\sigma} \,.\, \vec{u} \rangle = 1 - \frac{2\theta'}{\pi}, \tag{5}$$

où θ' est l'angle entre $\vec{u'}$ et $\vec{p}$. Supposons alors que $\vec{u'}$ est obtenu à partir de $\vec{u}$ par rotation vers $\vec{p}$ jusqu'à ce que

$$1 - \frac{2\theta'}{\pi} \; = \; \cos\theta \tag{6}$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ and $\vec{p}$. Alors nous avons le résultat souhaité

(7) $$\langle \vec{\sigma}.\vec{u} \rangle \ = \ \cos\,\theta.$$

Donc dans ce cas simple, il n'y a pas de difficulté au sens où le résultat de toute mesure est déterminé par la valeur d'une variable supplémentaire, et où les caractéristiques statistiques de la mécanique quantique émergent parce que la valeur de cette variable est inconnue dans les instances individuelles.

Deuxièmement, il n'y a pas de difficulté à reproduire, selon la forme (2), les seules caractéristiques de (3) utilisées communément dans les discussions verbales de ce problème :

(8) $$\begin{cases} P(\vec{u},\vec{u}) \ = \ -P(\vec{u},-\vec{u}) \ = \ -1 \\ P(\vec{u},\vec{v}) \ = \ 0 \quad \text{si} \quad \vec{u}.\vec{v} \ = 0 \end{cases}$$

Par exemple, appelons maintenant λ le vecteur unité $\vec{\lambda}$, avec une distribution de probabilité uniforme dans toutes les directions, et prenons

(9) $$\begin{cases} A(\vec{u},\vec{\lambda}) \ = \ \text{sign}\ \vec{u},\vec{\lambda} \\ B(\vec{u},\vec{v}) \ = \ -\text{sign}\ \vec{v},\vec{\lambda} \end{cases}$$

Cela donne

(10) $$P(\vec{u},\vec{v}) \ = \ -1 + \frac{2}{\pi}\,\theta,$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et (10) a les propriétés (8). Pour comparaison, considérons le résultat d'une théorie modifiée [6] dans laquelle l'état pur du singlet est remplacé au cours du temps par un mélange isotropique d'états produits ; cela donne la fonction de corrélation

(11) $$-\frac{1}{3}\vec{u}\ .\ \vec{v}$$

Il est probablement moins facile, expérimentalement, de distinguer (10) de (3), que (11) de (3).

Différemment de ce qui se passe en (3), la fonction (10) n'est pas satisfaisante à la valeur minimum -1 (à $\theta \ = \ 0$). On verra que cela est caractéristique des fonctions du type (2).

Troisièmement, et dernièrement, il n'y a pas de difficulté à reproduire la corrélation de mécanique quantique (3) si les résultats A et B dans (2) sont autorisés à dépendre de $\vec{v}$ et $\vec{u}$ aussi bien respectivement que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par exemple, remplacer $\vec{u}$ dans (9) par $\vec{u'}$, obtenu de $\vec{u}$ par rotation vers $\vec{v}$ jusqu'à

$$1 - \frac{2}{\pi}\,\theta' \ = \ \cos\ \theta,$$

où θ' est l'angle entre $\vec{u'}$ et $\vec{v}$. Pourtant, pour des valeurs données des variables cachées, les résultats des mesures avec un aimant dépendent maintenant des réglages de l'aimant distant, ce qui est juste ce que nous aurions souhaité éviter.

IV. Contradiction

Le résultat principal va maintenant être démontré. Parce que ρ est une distribution de probabilité normalisée,

(12) $$\int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda) \ = \ 1,$$

et à cause des propriétés (1), P dans (2) ne peut être inférieur à -1. Il peut atteindre -1 à $\vec{u} = \vec{v}$ seulement si

(13) $$A(\vec{u}, \lambda) \; = \; -B(\vec{u}, \lambda)$$

excepté en un ensemble de points λ de probabilité zéro. En supposant cela, (2) peut être réécrite

(14) $$P(\vec{u}, \vec{v}) \; = \; -\int \mathrm{d}\lambda \rho(\lambda) A(\vec{u}, \lambda) A(\vec{v}, \lambda).$$

Il s'ensuit de cela que $\vec{w}$ est un autre vecteur unité

$$\begin{aligned} P(\vec{u}, \vec{v}) - P(\vec{u}, \vec{w}) &= -\int \mathrm{d}\lambda \rho(\lambda)[A(\vec{u}, \lambda)A(\vec{v}, \lambda) - A(\vec{u}, \lambda)A(\vec{w}, \lambda)] \\ &= \int \mathrm{d}\lambda \rho(\lambda) A(\vec{u}, \lambda) A(\vec{v}, \lambda)[A(\vec{v}, \lambda)A(\vec{w}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

en utilisant (1), d'où

$$|P(\vec{u}, \vec{v}) - P(\vec{u}, \vec{w})| \leq \int \mathrm{d}\lambda \rho(\lambda)[1 - A(\vec{v}, \lambda)A(\vec{w}, \lambda)]$$

Le second terme sur la droite est $P(\vec{v}, \vec{w})$, d'où

(15) $$1 + P(\vec{v}, \vec{w}) \geq |P(\vec{u}, \vec{v}) - P(\vec{u}, \vec{w})|$$

À moins que P ne soit constant, le côté droit est en général d'ordre $|\vec{v} - \vec{w}|$ pour des petits $|\vec{v} - \vec{w}|$. Ainsi $P(\vec{v}, \vec{w})$ ne peut être stationnaire à la valeur minimum (-1 en $\vec{v} = \vec{w}$) et ne peut être égal à la valeur de mécanique quantique (3).

De même, la corrélation de mécanique quantique (3) ne peut être approximée de façon arbitrairement précise par la forme (2). La preuve formelle de cela peut être énoncée de la façon suivante. Nous ne nous préoccupons pas de l'échec de l'approximation en des points isolés, considérons donc à la place de (2) et (3) les fonctions

$$\bar{P}(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \text{and} \qquad \overline{-\vec{u} \,.\, \vec{v}}$$

où la barre au-dessus des lettres dénote le fait de moyenner indépendamment $P(\vec{u'}, \vec{v'})$ et $-\vec{u'}, \vec{v'}$ sur les vecteurs $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ dans les petits angles spécifiés de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Supposons que pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la différence est bornée par ϵ :

(16) $$|\bar{P}(\vec{u}, \vec{v}) + \vec{u} \,.\, \vec{v}| \leq \epsilon$$

Alors on montrera qu'ϵ ne peut pas être rendu arbitrairement petit.

Supposons que pour tout a et b

(17) $$|\overline{\vec{u} \,.\, \vec{v}} - \vec{u} \,.\, \vec{v}| \; \leq \; \delta$$

Alors à partir de (16)

(18) $$|\bar{P}(\vec{u}, \vec{v}) + \vec{u} \,.\, \vec{v}| \; \leq \; \epsilon + \delta$$

De (2)

(19) $$\bar{P}(\vec{u}, \vec{v}) = \int \mathrm{d}\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{u}, \lambda) \bar{B}(\vec{v}, \lambda)$$

où

(20) $$|\bar{A}(\vec{u},\lambda)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\bar{B}(\vec{v},\lambda)| \leq 1$$

De (18) et (19), avec $\vec{u} = \vec{v}$

(21) $$\mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)[\bar{A}(\vec{v},\lambda)\bar{B}(\vec{v},\lambda) + 1] \leq \epsilon + \delta$$

De (19)

$$\begin{aligned}
\bar{P}(\vec{u},\vec{v}) - \bar{P}(\vec{u},\vec{w}) &= \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)[\bar{A}(\vec{u},\lambda)\bar{B}(\vec{v},\lambda) - \bar{A}(\vec{u},\lambda)\bar{B}(\vec{w},\lambda)] \\
&= \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\bar{A}(\vec{u},\lambda)\bar{B}(\vec{v},\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{v},\lambda)\bar{B}(\vec{w},\lambda)] \\
&\quad - \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)\bar{A}(\vec{u},\lambda)\bar{B}(\vec{w},\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{v},\lambda)\bar{B}(\vec{v},\lambda)]
\end{aligned}$$

En utilisant (20) alors

$$\begin{aligned}
|\bar{P}(\vec{u},\vec{v}) - \bar{P}(\vec{u},\vec{w})| &\leq \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{v},\lambda)\bar{B}(\vec{w},\lambda)] \\
&\quad + \int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)[1 + \bar{A}(\vec{v},\lambda)\bar{B}(\vec{v},\lambda)]
\end{aligned}$$

Alors, en utilisant (19) et (21)

$$|\bar{P}(\vec{u},\vec{v}) - \bar{P}(\vec{u},\vec{w})| \leq 1 + \bar{P}(\vec{v},\vec{w}) + \epsilon + \delta$$

Finalement, en utilisant (18)

$$|\vec{u}\,.\,\vec{w} - \vec{u}\,.\,\vec{v}| - 2(\epsilon + \delta) \leq 1 - \vec{v}\,.\,\vec{w} + 2(\epsilon + \delta)$$

ou

(22) $$4(\epsilon + \delta) \geq |\vec{u}\,.\,\vec{w} - \vec{u}\,.\,\vec{v}| + \vec{v}\,.\,\vec{w} - 1$$

Prenons par exemple $\vec{u}\,.\,\vec{w} = 0$, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{w} = 1/\sqrt{2}$. Alors

$$4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1$$

Par conséquent, de petits δ, ϵ finis ne peuvent être arbitrairement petits.

Par conséquent, la valeur attendue en mécanique quantique ne peut pas être représentée, que ce soit précisément ou de façon arbitrairement proche, sous la forme (2).

V. Généralisation

L'exemple considéré ci-dessus a l'avantage de ne nécessiter que peu d'imagination pour envisager les mesures réalisées effectivement. De manière plus formelle, en supposant [7] que tout opérateur avec un ensemble complet d'états propres est un “observable”, le résultat est facilement étendu à d'autres systèmes. Si les deux systèmes ont des espaces d'états de dimension plus grande que 2, nous pouvons toujours considérer des sous-espaces de dimension deux et définir, dans leur produit direct, les opérateurs $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ formellement analogues à ceux utilisés ci-dessus et qui sont nuls pour les états en dehors du sous-espace produit. Alors, pour au moins un état de mécanique quantique, l'état “singlet” dans les sous-espaces combinés, les prédictions statistiques de la mécanique quantique sont incompatibles avec une prédétermination séparable.

VI. Conclusion

Dans une théorie dans laquelle des paramètres sont ajoutés à la mécanique quantique pour déterminer les résultats de mesures individuelles, sans changer les prédictions statistiques, il doit y avoir un mécanisme selon lequel le réglage d'un dispositif de mesure peut influencer la lecture d'un autre instrument, pourtant à distance. De plus, le signal impliqué peut se propager, instantanément de telle façon qu'une telle théorie ne respecte pas l'invariance de Lorentz. Bien sûr, la situation est différente si les prédictions de la mécanique quantique sont d'une validité limitée. Elles ne peuvent s'appliquer conceptuellement qu'à des expérimentations dans lesquelles les réglages des instruments sont effectués suffisamment à l'avance pour leur permettre d'atteindre une relation mutuelle par échange de signaux avec une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière. Dans cette relation, les expérimentations du type proposé par Bohm et Aharonov [6], dans lesquelles les réglages sont changés durant le voyage des particules sont cruciales.

Je suis reconnaissant aux Drs. M. Bander et J. K. Perring pour de très utiles discussions de ce problème. Le premier brouillon de cet article a été écrit durant un séjour à l'Université de Brandeis ; j'ai de la reconnaissance envers les collègues rencontrés là-bas et à l'Université du Wisconsin pour leur intérêt et leur hospitalité.

Références

1. A. Einstein, N. Rosen, B. Podolsky, Phys. Rev. 47, 777 (1935) ; voir aussi N. Bohr, Ibid. 48, 696 (1935), W. H. Furry, Ibid. 49, 393 et 476 (1936), et D. R. Inglis, Rev. Mod. Phys. 33, 1 (1961).

2. "Mais sur cette supposition nous devrions absolument, selon mon point de vue, tenir bon : la situation factuelle effective du système S_2 est indépendante de ce qui est fait avec le système S_1, qui est spatialement séparé du premier.", A. Einstein dans Albert Einstein, Scientifique philosophe, (Édité par P. A. Schilp) p. 85, Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949).

3. J. von Neumann, Mathematishe Grundlagen der Quanten-mechanik. Verlag Julius-Springer, Berlin (1932), [English translation : Princeton University Press (1955)]) ; J. M. Jauch et C. Piron, Helv. Phys. Acta 36, 827 (1963).

4. J. S. Bell, à paraître.

5. D. Bohm, Phys. Rev. 85, 166 et 180 (1952).

6. D. Bohm, Y. Aharonov, Phys. Rev. 108, 1070 (1957).

7. P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (3$^{\text{ème}}$ Ed.) p. 37. The Clarendon Press, Oxford (1947).