

Andrée Ehresmann : Choquet et la réforme des mathématiques modernes

Tout d'abord je désire remercier les organisateurs de cette journée qui m'ont proposé cette intervention et invitée à parler de rôle de Gustave Choquet dans la réforme des mathématiques et ça m'a fait plaisir parce que je trouve que souvent, le rôle de Choquet est un petit peu oublié aujourd'hui, et en particulier dans l'enseignement supérieur ; son rôle est d'après moi vraiment primordial.

Donc dans les années 50-60, au moment de la réforme, j'ai connu Choquet d'abord parce que j'ai eu la chance de suivre en 54-55, comme étudiante, son cours de calcul différentiel intégral de la licence de mathématiques et c'est juste l'année où il a donné ce cours pour la première fois, et où il a complètement fait la réforme des mathématiques. Il y avait un cours qui existait de Valeron depuis des années et là, il y a eu une réforme complète et c'est à mon avis l'une des choses essentielles qu'a fait Choquet pour cette réforme.

Alors avant de commencer, je voudrais bien spécifier qu'il n'est pas question pour moi ici de faire un travail d'historienne des mathématiques ; je ne sais absolument pas faire cela car je n'en aurais pas les connaissances. Et même sur la réforme, je connais certaines parties, mais il y a des tas de parties que je ne connais pas. C'est ici vraiment un témoignage personnel de ce que j'ai pu connaître par moi-même, donc par le fait que j'ai été l'étudiante de Choquet et puis sa première élève, vous savez peut-être qu'il a dirigé mes deux thèses puisque j'ai fait un doctorat de troisième cycle puis un doctorat d'état c'était la première année qu'existait un doctorat de troisième cycle, d'ailleurs, et puis ensuite, j'ai beaucoup discuté avec lui et dont je vais vous parler, c'est essentiellement quelque chose qui est une expérience personnelle, reposant essentiellement sur les discussions que j'ai eues de 1955 à 1962 avec Choquet, puis après 1957, donc ce n'est pas uniquement un témoignage.

Choquet avait dit quelque chose de tout à fait correct qui est que pour parler de la réforme des mathématiques, il faudrait commencer par savoir pourquoi il y a eu cette réforme, et donc remonter déjà au XIX^e siècle puisque à la fin de ce siècle, s'est produite la crise des fondements des mathématiques qui avaient cours au XIX^e siècle.

La réforme de mathématiques est venue du fait qu'au XIX^e siècle, au début du XIX^e siècle on avait l'impression que les mathématiques fonctionnaient très bien comme outil de représentation de la réalité, il n'y avait pas de problème. Mais là, à partir de 1830, il va commencer à y avoir des problèmes. Le premier problème a été la découverte des géométries non-euclidiennes. Jusqu'alors, on avait une géométrie la géométrie euclidienne, on appelait géométrie cette théorie qui était basée sur cinq axiomes et dont le cinquième axiome, souvent appelé postulat, disait en gros que par tout point extérieur à une droite, il passe une et une seule parallèle à cette droite.

Et puis à cette époque-là, un certain nombre de mathématiciens ont commencé à se poser la question de savoir si cet axiome était une conséquence des autres axiomes ou pas. Et ils se sont rendus compte qu'effectivement, cet axiome était indépendant. Pourquoi indépendant ? Eh bien parce qu'on pouvait construire des géométries qu'on qualifiait de non officielles, c'est à dire qu'une telle géométrie est une théorie mathématique qui vérifie les quatre premiers axiomes et puis qui à la place du cinquième axiome, vérifie un axiome disant qu'au contraire, étant donné une droite, eh bien, il peut y avoir une infinité de parallèles qui passe par un point extérieur à cette droite.

Donc c'étaient les géométries par exemple de Bolyai et Lobatchevski. Et donc ça, évidemment, ça allait bien, mais ça changeait complètement l'idée de la géométrie. Ensuite d'ailleurs il y a eu des géométries qu'on a hyperboliques, il y a eu aussi des géométries qu'on a dit elliptiques et en particulier Riemann a écrit un article sur les éléments qui fonde une géométrie.

La deuxième crise a été un développement : c'est le développement de la théorie des groupes en particulier par Évariste Galois, en 1830. Pourquoi ? On savait depuis un certain temps qu'il y avait des équations polynomiales qui ne pouvaient pas être résolues par radicaux, c'est à dire qu'on ne savait pas calculer leurs racines par les seules opérations que sont l'addition, la multiplication, l'élévation à la puissance et l'extraction de racine. On ne savait vraiment pas comment faire en particulier dans le cas de l'équation de degré 5 et Évariste Galois a pensé que pour étudier ce cas-là de résolution, pour pouvoir mieux savoir ce que fait l'équation, eh bien, au lieu de considérer une racine toute seule, et donc essayer de déterminer chaque racine en elle-même, eh bien, on veut au contraire regarder l'ensemble des différentes racines. Et Galois définit ce qu'il appelle le groupe de l'équation. Et de cette façon-là, ça va lui permettre d'avancer énormément. On a un certain nombre de structures algébriques, ces structures-là ne sont plus des structures numériques en principe, et donc, ça amène à parler plus généralement de la notion d'ensemble, d'où l'introduction de la théorie des ensembles, en particulier avec Cantor en 1874. Maintenant, dans cette théorie des ensembles, il va y avoir parmi ces ensembles des ensembles infinis. Un ensemble infini, c'est un ensemble qui a au moins une de ses parties qui est une partie propre, mais cela va amener à des parades comme le paradoxe de Russell. Par exemple, donc, le paradoxe du barbier qui formellement signifie qu'il n'existe pas d'ensemble qui ait la propriété qu'il contienne tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Donc à cause de tous ces paradoxes, on commence à douter de ce qu'est réellement la vérité mathématique. Qu'est ce que c'est exactement ? Et puis il va y avoir la formalisation de la logique en particulier par Frege en 1879. Donc à cette époque-là, on s'aperçoit qu'il y a une crise des fondements et comment faire pour pouvoir reconstruire sur des bases solides une théorie mathématique et qu'on voudrait vraiment toujours valable. Donc on voudrait que notre choix soit cohérent, complet et décidable.

Qu'est ce que ça veut dire cohérente, ça signifie que si on a une propriété dans la théorie, cette théorie ne permet pas que soit vérifié le contraire de cette propriété. Dire que la théorie est complète, soit la théorie permet de la démontrer, soit la théorie permet de la réfuter, on peut avoir la réponse à cette question à l'intérieur même de la théorie.

Bon, alors, est-ce que on va pouvoir trouver de telles théories mathématiques. Eh bien c'est le programme que David Hilbert va essayer de développer et, de 1898 à 1928, il va, en particulier, chercher à réduire l'arithmétique à la logique d'où les nombres seront déduits d'un système d'axiomes non contradictoires. Bon, pour cela, il développe ce qu'on appelle la méthode axiomatique et on dira de lui que Hilbert est le maître de la méthode axiomatique. Le problème, c'est qu'à ce moment-là, vont arriver, en 1931, les théorèmes d'incomplétude de Gödel donc on voit les limites, effectivement. À cause de ces résultats de Gödel, il va falloir essayer de voir comment faire pour définir de manière correcte une théorie mathématique. Les mathématiciens cherchent à répercuter tous les changements qui ont été causés par ces différentes crises des fondements, et en France, ça va être le rôle de Bourbaki d'effectuer ce passage des concepts vers les élèves.

Alors pourquoi est-ce je parle ici de Bourbaki ? Eh bien, pour plusieurs raisons. D'abord parce que, effectivement, je crois que son rôle a été vraiment très important mais surtout parce qu'effectivement, d'autres personnes qui étaient à la base de la réforme des mathématiques ont été très influencés par Bourbaki, et certains disent que si la réforme a été faite par Bourbaki, elle a essentiellement consisté à essayer de développer la philosophie des mathématiques. Par ailleurs, si on parle de ce mathématicien, on dit même souvent qu'il était un des membres fondateurs, ce qui n'est pas tout à fait vrai, enfin, il l'a presque été, mais pas tout à fait. Il est resté très actif pendant une quinzaine d'années dans le cercle Bourbaki donc je vais un peu rappeler un peu mieux. Je pense que tout le monde ici doit le savoir. Enfin, je souhaite quand même rappeler un petit peu ce qui a été bâti dans les années 1930.

Il y a eu des normaliens de l'époque, André Weil et Henri Cartan qui se sont retrouvés à avoir à enseigner l'analyse en licence, et ils ont cherché des livres pour le faire, ils ont trouvé que les livres qui existait à l'époque n'étaient pas rigoureux, et qu'en plus, ils n'étaient plus vraiment conformes à ce que l'on pensait être la rigueur mathématique à ce moment-là. Donc, ils ont dit qu'ils allaient essayer de faire eux-mêmes un nouveau traité d'analyse qui permettrait de corriger cette lacune et en fait, ils se sont très vite rendus compte que c'était un très gros travail.

Ils ont alors essayé de réunir un groupe d'amis, en principe d'anciens normaliens, il n'y en a eu qu'un seul, Mandelbrot, qui n'était pas normalien. Et donc pour essayer de modifier ou de faire ce traité qu'ils vont appeler d'ailleurs *Éléments de mathématiques*, sans s à mathématiques, ils s'étaient fixé comme objectif que ce traité donnerait vraiment une image complète des mathématiques telles qu'elles étaient à ce moment-là, qu'ils suivraient le modèle proposé par Hilbert, ok. Donc tous les mathématiciens considèrent que Bourbaki a fait un travail considérable. Et puis le travail de Bourbaki avait comme objectif, plutôt que d'avoir de plus en plus de spécialités mathématiques différentes, de montrer l'unité de la mathématique, ce qui permettrait de résoudre les contradictions, enfin cela tisserait une base théorique mathématique tout à fait solide. Et l'idée était que se rajouteraient en plus un certain nombre de spécialités qui allaient en particulier de l'algèbre, qui était très étudiée à l'époque en Allemagne mais qui par suite de questions politiques (à cette époque, on est juste au moment de l'arrivée de Hitler au pouvoir) avant la guerre, donc à un moment où il n'y a plus de vraie science comme il y en avait eu auparavant en Allemagne.

Les membres du groupe Bourbaki ont voulu vraiment développer eux-mêmes le traité. Le groupe s'est formé en 1935 et les membres du groupe, comme il fallait un auteur au livre *Éléments de mathématiques* ont choisi le nom de Bourbaki, bon, il y a en fait un canular sur ce nom Bourbaki et on on lui a inventé toute une généalogie. Les livres sont signés par Nicolas Bourbaki mais, même si le groupe a été créé en 1935, il y avait eu une première réunion en 1934. Cette photo représente le congrès bourbaki de 1938, trois ans après la création du groupe, la photo a été prise lors de la réunion pour fêter l'anniversaire des trois ans de Bourbaki. Sur la photo, la dame qui est ici, c'est la philosophe Simone Weil qui était la sœur de André Weil. Derrière, il y a Pisot, derrière un peu caché ici, c'est justement André Weil. Devant, nous avons Charles Ehresmann, qui est là avec sa belle chemise blanche, mais il y avait en plus et qui ne figure pas sur la photo Henri Cartan René de Possel, Claude Chevalley et Mandelbrot. Il faut savoir que lors des premières années de Bourbaki, il y a eu beaucoup de changements, c'est-à-dire que dans les premières années il y a eu un certain nombre de personnes qui ont commencé à être membres de Bourbaki, et puis ensuite,

pour une raison ou une autre, ils en sont partis, mais la durée du groupe a été longue.

Maintenant, les membres de ce groupe, comment vont-ils faire pour travailler ? Donc l'idée, c'est qu'ils vont se réunir pratiquement une fois par an, lors d'un congrès Bourbaki, et pendant ce congrès, ça fonctionne la manière suivante : l'idée c'est qu'il faut rédiger des livres, différents livres, les *Éléments de mathématiques*, qui sont découpés en différents livres, chacun divisé en différents chapitres et dans les réunions lors des congrès Bourbaki, l'idée c'est qu'on décide de quels livres il va être question, et donc on distribue des passages de ces livres à ceux qui le veulent bien, pour qu'ils donnent leur avis sur une première rédaction. Ensuite, ça traîne, les rédactions sont faites pour le congrès d'après et au congrès d'après, on revoit les rédactions des actes, souvent il y a des changements et c'est une des raisons pour lesquelles, d'ailleurs, ce processus de rédaction à l'infini a fait que beaucoup finissaient par ne plus vouloir aller au congrès bourbaki parce qu'il y avait l'impression que dans ces échanges, on n'avait pas vraiment des échanges calmes, c'est toujours celui qui crie le plus fort qui a le dernier mot, et généralement c'était Dieudonné qui finissait par devoir rédiger tout ce qui avait été fait. Et alors, ça l'avait particulièrement déçu qu'on ne veuille pas de ses notions de structures locales dans le fascicule de théorie des ensembles.

Alors combien y a-t-il eu de livres faisant partie des *Éléments de mathématiques* ? Honnêtement, je n'en sais rien ; je sais que le premier livre est paru seulement en 1939. Initialement Bourbaki comptait mettre trois ans pour produire tous les éléments mais en définitive, au bout de quatre ans, il n'y avait que le premier fascicule de théorie des ensembles qui était paru.

Le livre complet sur les ensembles a posé beaucoup de problèmes et il ne va paraître que beaucoup beaucoup plus tard (1957), très vite en paraît un autre en 1958. Il y a le livre de topologie qui paraît en 1940 et le livre d'algèbre, la première partie, en 1942.

Alors chaque livre débute toujours par un mode d'emploi. Quelle est l'idée ? L'idée, c'est de bien expliquer dans ce mode d'emploi, que c'est un livre qui n'est pas fait pour être enseigné tel quel, c'est à dire en théorie, oui, en théorie, la lecture d'un des livres ne nécessite aucun prérequis. Ils n'ont pas vraiment dû débiter des fondements mathématiques et tout est complètement fait mais donc toutefois la lecture d'un des livres ne présuppose donc en principe aucune connaissance particulière. Mais seulement, et c'est tout le problème, une certaine habitude de raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Et puis le mode d'exposition est axiomatique, les procédés sont présentés du général au particulier.

Donc on voit que ce traité n'est pas un traité pour l'enseignement, à prendre tel quel pour un enseignement, mais que c'est réellement quelque chose qui fonde globalement les mathématiques et essaye vraiment de donner une vision complète, selon moi, avec une base axiomatique, donc, et qui donne une vision complète de l'état actuel des mathématiques.

Mais effectivement, qu'est ce qu'on veut, quand on pense à l'université, Bourbaki produit des manuels et ils sont faits pour les étudiants en université mais le rôle de l'université, c'est effectivement d'essayer de développer le mathématiques, d'essayer, en plus, d'arriver à faire en sorte qu'on les utilise, qu'on les comprenne, qu'on les organise. Donc une bonne présentation des mathématiques, ce que fait Bourbaki, ce n'est pas la seule chose qu'il faut faire dans l'université. L'idée, c'est qu'il

sera aussi leur avis sur ce que l'enseignement doit être, et ce qu'on m'a dit des caractéristiques des traités de Bourbaki, c'est que ces traités ne sont pas faits pour être utilisés en tant que traités d'enseignement. Donc il va falloir, effectivement, pour arriver à enseigner aux étudiants qui vont devenir ensuite professeurs dans le secondaire par exemple, eh bien il va falloir faire quelque chose de différent. Il va donc falloir, effectivement, bien faire comprendre les mathématiques. Et donc, ce n'est pas les livres de Bourbaki qui vont intervenir ici. Et la difficulté, c'est comment faire passer dans l'enseignement tout ce qui est effectivement présent dans les mathématiques : il faut bien voir qu'à cette époque-là, quels étudiants fréquentaient l'université ? Quand j'ai commencé comme j'ai commencé, par exemple, en 1954, à cette époque-là, il y avait en tout et pour tout en France 18 universités et à Paris, il n'y avait qu'une seule université, qui couvrait complètement tout les domaines et toute la région parisienne. Et donc il n'y avait absolument pas beaucoup de possibilités, ceux qui voulaient vraiment faire des mathématiques, qui venaient à Paris pour faire des mathématiques, ceux qui venaient d'avoir leur baccalauréat, ils avaient en première année le cours de propédeutique, c'était des mathématiques générales, et c'était une sale année à passer, et puis, c'était obligatoire pour intégrer la licence et les étudiants qui préféraient, au lieu d'aller à l'université, aller en Math Spé, ils devaient quand même suivre ce cours de propédeutique. Et au fur et à mesure des années, il va y avoir de plus en plus d'étudiants et donc l'enseignement, il va falloir essayer de le rendre d'autant plus accessible, de le rendre beaucoup plus compréhensible que ce qu'il avait été au moment où les gens qui allaient à l'université étaient vraiment prêts à étudier. Avant, les étudiants qui faisaient des mathématiques, c'est qu'ils voulaient vraiment faire des mathématiques et cette situation qu'on voyait dans l'université française, elle existait également dans d'autres pays, en particulier aux États-Unis, en Belgique, en Suisse, en Grande-Bretagne, et donc il y a eu un certain nombre de gens qui se sont réunis et ils ont réalisé qu'il fallait essayer de faire quelque chose pour permettre qu'il y ait une réforme de l'enseignement. Ils ne tenaient pas seulement compte du point de vue mathématique mais ils cherchaient aussi à voir comment on peut faire mieux comprendre à des étudiants ce qu'on leur enseigne, comment on peut les aider d'une manière ou d'une autre, à voir comment les connaissances se développent et c'est bien ce processus qui a conduit à la création de la Commission. Il y a eu création d'une Commission internationale pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques. Gattegno (Caleb), qui était à l'université de Londres, qui était un mathématicien mais aussi un pédagogue et un philosophe, qui a créé en 1952 cette commission ; il a nommé Choquet comme président.

Donc voilà le rôle de Choquet, qui commence à cette époque-là son travail à la commission, dont il est président. La commission a comme vice-président Jean-pierre Kahane, un mathématicien. Cette commission va se réunir annuellement. Selon les années, les membres de la commission vont aller dans un pays ou dans un autre. Sur cette photo, on voit en particulier Choquet, avec à côté de lui Mademoiselle Félix qui était une professeure de mathématiques dans le secondaire. Je l'ai vue assez souvent venir chercher Choquet à la fin de ses cours pour qu'ils puissent discuter. L'écriture comptait beaucoup, sur les formules mathématiques, elle avait un rôle très important de là dedans. Et puis il y avait Piaget. Alors curieusement, cette commission existe toujours, c'est-à-dire aujourd'hui, donc 20 ans plus de vingt ans après, elle existe toujours et on peut trouver facilement son manifeste qui explique ce que vont faire les travaux de la commission et quelle est l'idée justement qui consiste à avoir mélangé des mathématiciens avec des philosophes, avec des épistémologues.

Là, je vous propose de lire un passage du manifeste de cette commission. Donc Choquet amena

dans la discussion l'idée d'une réforme guidée par la restructuration de l'architecture des mathématiques. Piaget présenta... Bon, je vous laisse lire. Donc voilà quel était le but de cette commission.

Maintenant, ce que je voudrais, c'est voir effectivement ce qu'elle va faire, je sais qu'il y a eu d'autres personnes qui sont venus, mais c'est plus tard, j'ai plutôt souhaité parlé du tout début, donc de ce qui s'est passé dans les premières années. C'est après, c'est plutôt à partir de 1959-1960 que ces gens-là sont venus. Qu'est ce que ça veut dire quand on dit que Choquet aimait l'idée d'une réforme guidée par la restructuration de l'architecture des mathématiques. On l'a vu dans le manifeste, et bien pour aller directement au propos qui m'intéresse, Choquet explique dans le manifeste que, bien que n'ayant jamais été un Bourbakiste, il était très influencé par l'esprit de bourbaki tout en étant quand même capable très souvent dans sur des points particuliers de critiquer énormément Bourbaki. Mais donc, pour Choquet, il dit que quand il propose que les restructurations des concepts des mathématiques se fassent en s'inspirant de la philosophie de Bourbaki qui se fait ailleurs (bon, avec son humour il disait qu'il ne voulait pas "read the mind of light manager"), l'esprit, la philosophie pour Bourbaki existe aussi en seulement UNE mathématique. Pour Bourbaki, le principal instrument pour l'évolution de la mathématique vers son unité, eh bien, c'était la méthode axiomatique, c'est-à-dire que pour Choquet, la méthode axiomatique est justement ce qui va permettre de développer les mathématiques d'une façon intéressante, beaucoup plus facilement que lorsqu'elles sont développées sans la méthode axiomatique parce que ça permet une économie puisque l'idée, c'est qu'on va essayer simplement de toujours démontrer un théorème en choisissant la notation et cetera, en tenant compte de ce fait que cette notation soit la plus générale possible, et donc il y aura beaucoup de cas particuliers qui vont se déduire de l'énoncé sans être obligé à chaque fois de le redire.

En particulier, par exemple, la notion d'objet, eh bien, on va pouvoir la définir un peu dans n'importe quelle catégorie, on n'y reviendra pas.

Choquet va avoir l'occasion de mettre lui-même en œuvre la réforme en mars suivant en région. Ici vous avez une page de références et l'article [3], c'est justement un article écrit par Choquet et qui va encore être cité plusieurs fois, un article très intéressant qui a eu un gros impact et qui s'appelle "Que sont les mathématiques modernes?". Il a été publié en anglais dans la collection des livres édités par Gattegno et mais cet article en anglais est la traduction de l'article en français de Choquet. Comment Choquet va-t-il pouvoir être le premier réformateur, d'une certaine façon? Qu'est ce qui, effectivement, va être utilisé, de la réforme, dans l'université, et comment Choquet pouvait-il appliquer cette réforme qu'il voulait proposer : il a été nommé donc il a annoncé cette réforme donc dans les années 1950, et c'est en 1953 et 1954 qu'il va être capable d'appliquer sa réforme au niveau de la licence. Comment cela se fait-il? Eh bien, tout simplement, parce que Choquet avait été nommé professeur à l'université en 1951 ou 1952 et donc à l'époque, il avait 27 ans. Mais en 1954, le professeur chargé de l'enseignement de calcul différentiel et intégral dans la licence de mathématiques depuis des années et des années est décédé, et son enseignement se résumait à exposer son cours qui provenait de très gros livres, entièrement sur les fonctions numériques, etc et donc, son enseignement était assez démodé si on le compare avec l'enseignement que j'ai reçu l'année de mon bac par exemple. Et ce cours était reconduit chaque année et quand, à la mort de Valero, il a fallu trouver un remplaçant, c'est Henri Cartan qui, connaissant un petit peu ce que Choquet avait en tête, Henri Cartan donc, a pensé que c'était peut-être le bon moment pour que Choquet montre comment appliquer la réforme.

Et donc Choquet a été titularisé pour donner le cours de calcul différentiel et intégral et donc en 1954-1955, bon, comme toutes les fois où on fait un premier cours, surtout quand justement on veut tout modifier, on a envie de montrer quelque chose de nouveau, en principe, ces cours sont remarquables. Bon moi, j'ai suivi ce cours, je dois reconnaître que je pense que j'ai eu une chance inouïe de suivre ce cours parce qu'il était vraiment fait d'une manière extraordinaire. D'abord, donc, qu'est ce que Choquet a fait ? Eh bien, en gros, il a donc fait ce qu'il avait dit, c'est à dire qu'il a repris la méthode axiomatique, c'est-à-dire partir de la théorie des ensembles, ensuite voir les structures algébriques ensuite il a fait un cours de topologie, il y a eu les espaces métriques, les espaces vectoriels topologiques, et tout ça, toujours avec des cours excessivement clairs et avec beaucoup beaucoup de figures. C'est quelqu'un qui mettait beaucoup de figures, c'est ça une de ses caractéristiques, qui en font quelqu'un de très différent de Delaunay, comme nous ne reverrons à la fin.

Et donc, en plus, Choquet voulait vraiment qu'on arrive à comprendre : quand on fait un cours, comme ça, tout à fait nouveau, il faisait très attention et nous poser sans cesse des questions, et il nous demandait toujours de lui expliquer les difficultés, et puis ensuite, dès le second semestre, il a commencé à nous demander d'aller le voir à la fin du cours parce qu'il voulait nous connaître, pour pouvoir discuter et c'est donc c'était un cours non seulement très intéressant mais on sentait que le professeur s'y intéressait, il ne s'intéressait pas seulement au cours, mais également à la manière dont le cours passait auprès des élèves, ce qui n'est pas la même chose, parce qu'on peut faire un excellent cours sans tellement tenir compte de ce qu'en pensent les étudiants.

Je trouve que son cours était extraordinaires et remarquable et d'ailleurs plus tard je me suis beaucoup inspirée de son cours quand je voulais faire moi même cours.

Maintenant, il y avait quand même des gens qui n'étaient pas d'accord, c'est-à-dire que le problème, c'était justement l'histoire de Bourbaki, curieusement, parce que ce que Choquet nous avait dit dès le début, c'est qu'il suivait pas mal de choses qui était de Bourbaki et que Bourbaki était effectivement très important et il faudrait, un jour, si nous voulions continuer que nous étudions Bourbaki mais que pour l'instant, bon, eh bien, c'était trop abstrait pour nous et il y a eu des étudiants qui ont voulu aller directement voir Bourbaki et qui au fond ont eu l'impression qu'ils n'arrivaient pas à comprendre réellement. Ce n'était pas vraiment inquiétant, effectivement, mais je pense quand même que la majorité des étudiants qui ont eu ce certificat étaient très intéressés par cette nouvelle présentation que l'on peut retrouver, d'ailleurs, dans un livre qu'on peut trouver sur internet, et qui est le cours de mathématiques de Gustave Choquet, et personnellement, le fait d'avoir suivi ses cours a fait que j'ai été bien préparée aussi pour lire les livres de Bourbaki plus tard, parce que pour la réforme des mathématiques modernes, au niveau de la licence, Choquet s'est également intéressé à développer d'autres choses, toujours au niveau de l'université. Il s'est rendu compte que très vite qu'il y avait un certain nombre de matières qui étaient très mal vues. Pourquoi ? C'est une question à laquelle il est difficile de répondre. En particulier, les probabilités, or Choquet était intéressé par les probabilités puisque certains de ses ouvrages ont des liens avec la théorie de la mesure et avec les probabilités. Or dans ces années-là, en France et en particulier dans le cercle Bourbakiste, les probabilités étaient très mal vues, parce qu'on considérait que ce n'étaient pas vraiment des mathématiques. Donc les bons étudiants n'essayaient pas de faire des probabilités

et Choquet a pensé que c'était vraiment dommage parce qu'il y avait quelque chose à faire dans ce domaine, d'autant plus que je venais de faire paraître le livre *Une introduction aux probabilités*. À ce moment-là, pour faire parler des probabilités, il a eu l'idée d'inviter Féjer, Choquet suivait le cours également. Il y avait beaucoup de monde qui assistait à ce cours. Il y avait en particulier des normaliens comme Pierre André Meyer ainsi que ceux qui vont, grâce à ce cours et à la suite de cours, vraiment fonder et développer l'école française des probabilités. Choquet d'une certaine façon a quand même permis le développement des probabilités en France. J'ai une petite anecdote là-dessus qui m'avait beaucoup frappée : Henri Cartan suivait temps en temps ce cours. Paul-André Meyer est allé trouver Henri Cartan à la fin, c'était un normalien avec qui il avait plus ou moins eu l'intention de travailler, enfin, il n'avait rien décidé encore et il avait expliqué à Henri Cartan qu'il trouvait que c'était très intéressant et que tout compte fait, il voudrait faire des recherches en probabilités, et Cartan lui avait répondu de façon très dédaigneuse "Eh bien alors, à ce moment-là, vous êtes perdu pour la recherche mathématique." Ça montre bien ce qu'on pensait des probabilités à l'époque en France, enfin, en tout cas les membres de Bourbaki pensaient cela. Elles ont été réhabilitées beaucoup plus tard mais je crois qu'il n'y a pratiquement rien, concernant les probabilités, dans les livres de Bourbaki, ou alors dans les livres beaucoup plus récents. Et le problème des probabilités à l'université a été également un peu le problème de la théorie des catégories. Et là encore, Choquet va intervenir et effectivement lui, il était très intéressé par les catégories. Alors il faut bien voir qu'en France, les catégories normalement ont débuté par l'article de Eilenberg-macLane, qui a été écrit en 1945 et à ce moment-là, il n'a pas vraiment attiré l'attention des gens, même Ehresmann qui donc était quand même initialement un topologue ne s'y est pas tellement intéressé. En principe les gens à qui cet article s'adressait plutôt étaient des spécialistes de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Donc ce premier article n'a pas été diffusé réellement en France. Et puis en 1956, il y a des gens qui devaient le connaître, mais Choquet en a parlé. En particulier, on n'avait jamais entendu parler de catégories avant 1957, si ce n'est qu'en 1956, il y a eu le livre de Henri Cartan et Samuel Eilenberg qui s'appelle *Homological algebras* et qui lui est paru en France. Et alors, ce qui est amusant d'ailleurs, eh bien, c'est que le mot catégorie n'est pas réellement défini. Ils parlent beaucoup de facteurs, ils définissent très bien la notion de facteurs et quand ils définissent les foncteurs (entre parenthèses, ils disent qu'il faut un renvoi à la notion de catégories comme qu'on peut la trouver dans l'article de Eilenberg : c'est assez curieux : dès cette époque-là, il y avait un peu une peur de parler des catégories comme parce que c'était une notion qui paraissait trop générale pour avoir vraiment un intérêt. Et donc Choquet a relu ce livre et c'est à ce moment-là qu'il s'est rendu compte que ça pouvait être très intéressant, parce que les catégories, eh bien, la théorie des catégories était un outil essentiel pour la méthode axiomatique et qui permettait de formaliser en particulier la notion de problèmes universels, de structure initiale, finale, de produits, ... Je me souviens que Choquet a été très frappé par la notion de produit, la définition des produits dans une catégorie. Et j'avais été étonnée de voir l'enthousiasme au pied levé, je crois que c'est ça qui lui a fait dire que c'était vraiment intéressant, les catégories et on parle beaucoup de ce fameux article de 1962 que j'ai déjà cité et non seulement, il parle dans cet article de la théorie des catégories mais encore il laisse espérer que Bourbaki renouvelle un peu ses livres. Je n'ai jamais compris pourquoi Bourbaki n'a jamais voulu intégrer les catégories. C'est probablement, je pense, une des raisons pour lesquelles après les années soixante-dix, Bourbaki a quand même perdu un peu de sa vitalité, même s'il a continué à prôner une culture commune, comme dans les premières années. Et donc à la fin de l'article, Choquet milite pour qu'on adopte vraiment les catégories au niveau d'enseignement. Et en fait, Choquet est non seulement intéressé par les catégories, mais très

vite, il a essayé de promouvoir les catégories, et il les a souvent défendues. Et en fait, c'est grâce à lui que j'ai étudié les catégories, curieusement, parce qu'à la fin de 1957, donc au moment où il était en train de commencer à expliquer les catégories et où il réalise que c'est quelque chose d'intéressant, on avait eu une discussion, j'étais à l'époque en train de terminer ma thèse de 3ème cycle et on commençait à nous poser la question : "Donc qui l'a dirigée ? Et on veut savoir qu'est ce que vous allez faire comme doctorat d'état ?". Ma thèse de troisième cycle portait sur un problème qui était fini après la thèse. Par conséquent, il me fallait trouver quelque chose de nouveau, et c'est à ce moment-là qu'il m'a suggéré d'étudier les catégories. Curieusement, d'ailleurs, ça a eu une conséquence, c'est que c'est ce qui m'a permis de rencontrer Charles Ehresmann parce que c'était à l'époque, en 1950, où il était le seul à enseigner la théorie des catégories à Paris, donc c'est comme ça que je l'ai rencontré et dans ma thèse de doctorat d'état, donc Choquet a posé la question : "Est-ce que c'est toi qui as fait une présentation catégorique des distributions ?" Oui, c'est que je vieillis... Il faut que ça soit accessible quand on cite. Dans le site, il y a un article qui s'appelle "des structures..." et il y a effectivement les distributions selon une présentation catégorique en utilisant comme outil la notion de dix structures que j'ai introduites, et qui est en fait une généralisation mais enfin à une époque où il n'existait pas encore des distributions.

Donc effectivement, c'est Choquet qui m'a encouragée à développer des applications des catégories en analyse, il faut savoir qu'à l'époque, il n'y en avait pas ; après il y a eu un certain nombre de gens qui ont utilisé les catégories en analysant la prison que c'est ailleurs. Mais enfin, à l'époque, il n'y en avait encore eu aucune. Et donc comme je m'intéressais beaucoup aux distributions, pour d'autres raisons, j'ai voulu voir si on pouvait les définir ; c'est possible, même s'il est difficile d'expliquer exactement ça ici. En tout cas effectivement, dans mon article qui s'appelle "Dix structures...", sur le site, vous pouvez le trouver et ensuite il y a eu de nombreuses attaques contre les catégories, et également contre nos serveurs, et donc chaque fois Choquet nous a toujours défendus.

Et au moment où j'ai donné les plus premiers cours, donc, à Amiens, en 1967-1968, ça a eu deux effets. Donc j'avais à l'époque un enseignement de licence mais pas une licence disons que cette année là dans 1967-1968, il y a eu la formation des nouvelles licences qui se faisait dans un seul but, ces licences étaient plutôt destinées à des étudiants qui voulaient présenter le CAPES¹ et où il y avait dans le programme un peu d'algèbre, un peu de topologie, un peu de tout et je me souviens que quand ils ont dû assurer le programme, mes collègues étaient absolument épouvantés et moi j'ai trouvé que le programme était exactement, en fait, pratiquement le programme allégé de ce que Choquet nous avait donné comme cours dans les années 1954-1955 et que maintenant qu'en plus, il y avait les catégories, ce serait excellent de faire un cours de licence en utilisant la théorie des catégories. Les années suivantes, j'ai même donné un cours de théorie des catégories au niveau du premier cycle de l'université.

Voilà, alors là, j'ai dit ce que je voulais dire sur le rôle de Choquet dans la réforme de l'enseignement, en tout cas au niveau de l'université. Je n'ai pas parlé du tout, effectivement, de ce qu'il a pu faire sur la géométrie dans l'enseignement secondaire. Pourquoi ? Eh bien parce qu'effectivement, il a eu beaucoup d'idées. Malheureusement, les idées pour réformer ne sont pas toujours été appréciées à leur juste valeur parce que c'est plutôt le point de vue des deux zones, et les autres l'ont emporté, voilà.

1. pour devenir professeurs de mathématiques dans le second degré.

En fait, Choquet s'est beaucoup intéressé à l'enseignement de la géométrie, et déjà surtout, dans les études secondaires. Je ne parlerai pas de ce sujet parce qu'il y a un excellent article de René Guitard qui est paru en 2021, qui s'appelle "Metamorphosis of jamaican teaching in France 1950-1969" et qui est publié dans un livre dont l'une des éditrices est Évelyne Barbu et eux montrent effectivement très bien le rôle de Choquet et le rôle de Dieudonné et voilà un passage que je vous laisse lire ; vous voyez, la fin est assez claire et elle reflète le premier réformateur, c'est donc Dieudonné qui dit qu'on réduisait la géométrie à un chapitre sur les aires, les produits scalaires et des formes adaptées et l'autre, c'est Choquet qui dit qu'il faut définir la géométrie comme une théorie axiomatique à la fois linéaire et métrique.

Merci beaucoup pour cet exposé passionnant Andrée.

La dualité, c'est qu'il y a à la fois l'axiomatique, mais qu'il y a aussi le rapport à l'expérience, c'est ça, voilà ; c'était ça l'idée de Choquet : c'est vraiment que dans l'enseignement, il faut toujours que l'on se raccroche à l'expérience.

L'ORGANISATEUR : Alors juste pour vous signaler que dans la conversation par le tchat, on a un message de Daniel Choquet, qui est le fils de Gustave Choquet et il nous remercie beaucoup pour cette présentation. Daniel Choquet écrit :

"C'est pour moi particulièrement émouvant car vous me faites revivre cette période dont j'ai été témoin dans le cadre familial."

Je ne sais pas si monsieur Choquet nous voit mais je peut vous dire qu'Andrée Ehresmann est très touchée de votre message.

ANDRÉE EHRESMANN : Je suis très touchée, je vous remercie beaucoup, et je suis très touchée par votre message, merci.