

2. Comptage de nombres premiers et fonction zeta

On commence par rappeler certains faits très connus à propos de la fonction zeta de Riemann. On ne démontre pas ces assertions classiques ici, mais le lecteur intéressé peut trouver beaucoup de ressources bibliographiques sur ce sujet, par exemple en consultant le livre très agréable d'Edwards [126], dans lequel l'article original de Riemann, qui sera principalement suivi ci-dessous, est reproduit.

L'article séminal de Riemann "Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée" (cf. [255], ainsi que [126]) établit une relation remarquable entre la distribution des nombres premiers et les zéros de la fonction zeta donnée par le produit eulérien

$$(2.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

La fonction définie par (2.1) a un prolongement analytique dans le plan complexe et est régulière partout, excepté en un pôle simple $s = 1$ où

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \gamma,$$

avec γ la constante d'Euler.

Le prolongement analytique est obtenu dans [255] en utilisant la fonction Γ

$$\Gamma(s) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx,$$

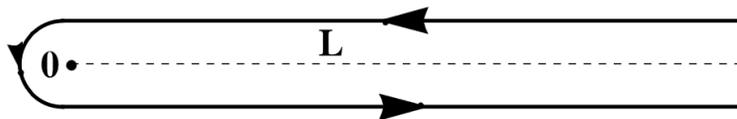


FIGURE 1 : Contour L

qui donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty n^{-s},$$

dont il découle, en utilisant $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$, que

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_L \frac{(-x)^s dx}{e^x - 1 x},$$

¹A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, (American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, 2008), vol. 55.
²A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*, PNAS 2022, Vol. 119, n° 22.
 Transcription et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2024

où

$$(-x)^s = e^{s \log(-x)}, \quad \Im \log(z) \in (-\pi, \pi), \quad \forall z \notin -\mathbb{R}_+$$

et l'intégration s'effectue le long du chemin orienté L de $+\infty$ à $i\epsilon$ dans $\mathbb{R} + i\epsilon$, puis dans le sens des aiguilles d'une montre en passant autour de l'origine dans \mathbb{C} et enfin en retournant de $-i\epsilon$ à $+\infty$ dans $\mathbb{R} - i\epsilon$.

En utilisant la formule du résidu de Cauchy, Riemann démontre l'équation fonctionnelle

$$(2.2) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos(s\pi/2) \Gamma(s) \zeta(s),$$

qu'il écrit en une forme plus symétrique comme la symétrie

$$(2.3) \quad \zeta^*(s) = \zeta^*(1-s).$$

de la fonction zeta "complète"

$$(2.4) \quad \zeta^*(s) = \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s).$$

Après avoir écrit ζ^* comme la transformée de Mellin de la fonction theta de Jacobi, $\vartheta(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$,

$$(2.5) \quad \zeta^*(s) = \int_0^\infty \vartheta(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

ce qui donne une autre preuve de l'équation fonctionnelle (2.3). Riemann introduit alors la fonction ξ , qu'il définit par

$$(2.6) \quad \xi(t) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s), \quad s = \frac{1}{2} + it$$

La fonction $\xi(t)$ est une fonction entière, paire et à valeur réelle pour t réel,

$$\xi(t) \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il a été énoncé dans l'article de Riemann (et prouvé rigoureusement par Hadamard) que la fonction ξ peut aussi s'écrire sous la forme

$$(2.7) \quad \xi(t) = \xi(0) \prod_\alpha \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right),$$

le produit s'effectuant sur les zéros $\{\alpha \in \mathbb{C} : \xi(\alpha) = 0\}$. L'hypothèse de Riemann, toujours non démontrée au moment où le présent livre est écrit, énonce que tous ces zéros sont réels.

La fonction zeta $\zeta(s)$ s'annule pour tous les nombres entiers négatifs pairs $s = -2, -4, \dots, -2n, \dots$. On les nomme habituellement les *zéros triviaux*. Le problème difficile est celui de la localisation des *zéros non triviaux* restant. De (2.6), il découle qu'ils sont de la forme

$$\rho = \frac{1}{2} + i\alpha, \quad \xi(\alpha) = 0$$

et l'hypothèse de Riemann énonce qu'ils sont tous situés sur la droite $\Re(z) = 1/2$.

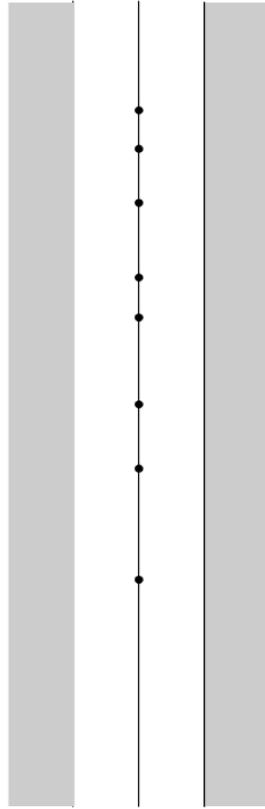


FIGURE 2. Zéros de zeta

La relation explicite entre les zéros de zeta et les nombres premiers s'exprime dans les *formules explicites*. Dans sa forme originale due à Riemann, la formule explicite exprime la *fonction de comptage des nombres premiers*

$$(2.8) \quad \pi(x) = \#\{p \text{ un nombre premier} : p \leq x\}.$$

en fonction du logarithme intégral

$$(2.9) \quad \text{Li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log(u)} \sim \sum_k (k-1)! \frac{x}{\log(x)^k}.$$

(ce que Gauss avait trouvé numériquement comme fournissant le comportement dominant de $\pi(x)$) et des zéros non triviaux ρ de zeta selon la formule

$$(2.10) \quad \pi'(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} + \log \xi(0),$$

avec

$$(2.11) \quad \pi'(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \dots$$

Le *théorème des nombres premiers* affirme que la fonction de comptage a le comportement asymptotique suivant

$$(2.12) \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}.$$

L'hypothèse de Riemann mentionnée ci-dessus est équivalente à l'assertion que le reste dans

$$(2.13) \quad \pi(x) = \text{Li}(x) + R(x)$$

est d'un ordre de grandeur de

$$(2.14) \quad |R(x)| = O(\sqrt{x} \log(x)).$$

Notons que la qualité principale de (2.10) n'est pas de donner une formule explicite pour la fonction de comptage des nombres premiers. Une telle formule explicite existe [201] et est donnée (pour $n > 5$) par

$$(2.15) \quad \pi(n) = 2 + \sum_{k=5}^n \frac{e^{2\pi i \Gamma(k)/k} - 1}{e^{-2\pi i/k} - 1}$$

Il est clair cependant qu'à cause de la présence du grand nombre $\Gamma(k) = (k-1)!$ dans l'exponentielle $e^{2\pi i \Gamma(k)/k}$, la formule (2.15) est de peu d'utilité pour trouver une estimation asymptotique telle que celle qui est souhaitée dans (2.14).

Il y a de nombreuses variantes de la formule explicite (2.10). Par exemple, en désignant par $\Lambda(n)$ la fonction de von Mangoldt

$$(2.16) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, p \text{ un nombre premier, } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $\psi(x)$ est la fonction de Chebyshev-von Mangoldt,

$$(2.17) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

i.e. la fonction en escalier qui démarre à zéro et qui effectue un saut de $\log p$ à chaque puissance p^k . La valeur de $\psi(x)$ en un point de discontinuité est *définie* comme la moyenne

$$(2.18) \quad \psi(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x+0)}{2}$$

Alors, une instance de la formule explicite est ([240] Théorème 3.8)

$$(2.19) \quad \psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1-x^{-2}), \quad \forall x > 1.$$

Ici la somme s'effectue pour tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ et se comprend comme la limite

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \sum_{|\Im(\rho)| < E} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

Toutes ces formules sont des cas particuliers de la formule explicite de Weil qui s'énonce mieux dans le cadre des fonctions de test sur le groupe des classes d'idèles. On rappellera cette formule ultérieurement dans le § 8 et l'un des résultats principaux de ce chapitre, en plus de fournir une interprétation spectrale des zéros de la fonction zeta, est de donner un paradigme géométrique dans lequel la formule

explicite de Weil devient une formule de trace.

Dans son article, Riemann donne une estimation asymptotique pour le comptage des zéros non triviaux de zeta dans une certaine région du plan complexe, notamment la fonction

$$(2.20) \quad N(E) = \#\{\rho \mid \zeta(\rho) = 0, \text{ et } 0 < \Im(\rho) \leq E\}.$$

Comme résultat préliminaire à l'étude de la fonction $\pi(x)$, Riemann énonce que cette fonction de comptage a pour comportement asymptotique

$$(2.21) \quad N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}.$$

Cela a été démontré rigoureusement par von Mangoldt, et peut être vu en considérant l'intégrale

$$(2.22) \quad 2(N(E) - 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{d\zeta^*(s)}{\zeta^*(s)}$$

en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre le long du contour du rectangle

$$R = \{s : -\epsilon \leq \Re(s) \leq 1 + \epsilon, -E \leq \Im(s) \leq E\}$$

(cf. Figure 3). En utilisant l'expression (2.4), on obtient (cf. par ex. [126], § 6.6)

$$(2.23) \quad N(E) = \frac{\theta(E)}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi} \Im \int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds,$$

où C est la partie de ∂R de $1 + \epsilon$ vers $1/2 + iE$ (cf. Figure 3) et $\theta(E)$ est la fonction angulaire de Riemann-Siegel, donnée par

$$(2.24) \quad \theta(E) = -\frac{E}{2} \log \pi + \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{E}{2} \right).$$

avec $\log \Gamma(s)$ pour $\Re(s) > 0$ la branche du logarithme qui est réelle pour s réel. Cela représente la phase de zeta sur la droite critique dans la mesure où la fonction $Z(t)$,

$$\zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) = e^{-i\theta(t)} Z(t),$$

est de valeur réelle pour $t \in \mathbb{R}$. Pour cette fonction $\theta(t)$ on a (cf. par ex. [126] § 6.5)

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5760t^3} + \dots$$

dont l'estimation pour $N(E)$ découle, en supposant que la taille du terme d'erreur soit contrôlée

$$(2.25) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \Im \int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \frac{1}{\pi} \Im \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iE \right),$$

où l'on suppose que E n'est pas la partie imaginaire d'un zéro, alors que la branche du logarithme est uniquement définie par (2.25) et est 0 en $iE + \infty$. La contribution principale au terme d'erreur

$N_{\text{osc}}(E)$ provient de l'intégrale dans la portion du contour C allant de $1 + iE$ à $\frac{1}{2} + iE$ et on peut montrer (cf. [240] Théorème 4.7) que

$$N_{\text{osc}}(E) = O(\log E).$$

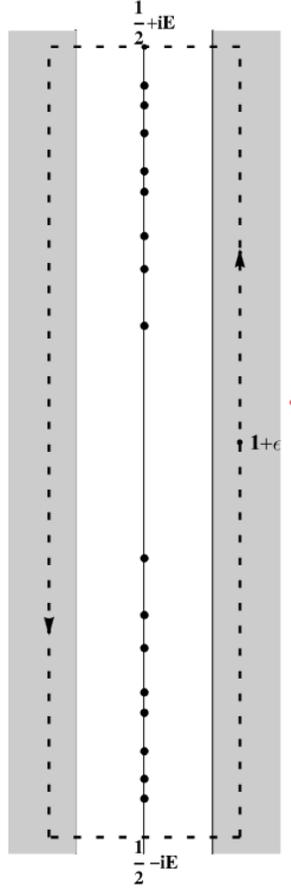


FIGURE 3. Le rectangle R et le chemin C

3. Mécanique classique et mécanique quantique de zeta

Le résultat ci-dessus de Riemann sur l'estimation de $N(E)$ lorsque $E \rightarrow \infty$ dont il est question dans le § 2 (cf. [255], [126]) peut être formulé comme l'assertion que la fonction $N(E)$ de (2.20) a une décomposition de la forme

$$(2.26) \quad N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E),$$

où la partie oscillante $N_{\text{osc}}(E)$ est de l'ordre de $O(\log E)$ et est donné par l'expression

$$(2.27) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \Im \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iE \right),$$

alors que la partie moyenne

$$(2.28) \quad \langle N(E) \rangle = 1 + \frac{\theta(E)}{\pi},$$

a un développement asymptotique de la forme

$$(2.29) \quad \langle N(E) \rangle = \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right) + \frac{7}{8} + o(1).$$

On a les expressions équivalentes suivantes pour $\langle N(E) \rangle$.

LEMME 2.1. *La fonction $\langle N(E) \rangle$ satisfait*

$$(2.30) \quad \langle N(E) \rangle = 1 - \frac{E}{2\pi} \log \pi + \frac{1}{\pi} \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{E}{2} \right),$$

et

$$(2.31) \quad \langle N(E) \rangle = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^E \left(-\log \pi + \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) \right) ds$$

PREUVE. La première égalité découle de (2.28) et (2.24). La seconde découle de

$$\begin{aligned} d \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) &= \frac{1}{2i} d \left(\log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) - \log \Gamma \left(\frac{1}{4} - i \frac{s}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) ds \end{aligned}$$

alors que $\Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) = 0$ pour $s = 0$ par le choix de la branche du logarithme. □

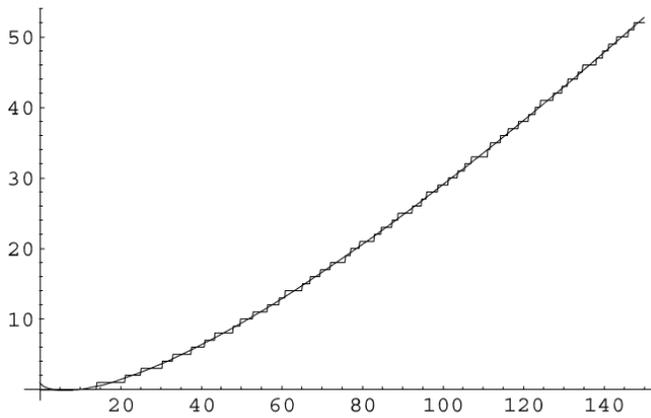


FIGURE 4. Le nombre de zéros de $N(E)$ et son approximation par $\langle N(E) \rangle$.

3.1. Raies spectrales et flot de Riemann.

Il a été observé par Berry dans [18] qu'il y a une similarité intéressante entre l'expression dans (2.26) et la formule semi-classique pour le nombre des valeurs propres

$$(2.32) \quad N(E) = \# \text{ valeurs propres de } H \text{ dans } [0, E]$$

d'un opérateur hamiltonien H obtenu en “quantifiant” un système dynamique classique donné par un espace de phases symplectique X et une fonction hamiltonienne h . Dans ce modèle, la partie moyenne $\langle N(E) \rangle$ est calculée comme un volume dans l'espace des phases, notamment

$$(2.33) \quad \langle N(E) \rangle := \text{volume symplectique } \{x \in X \mid h(x) \leq E\}$$

alors que la partie oscillante est donnée par

$$(2.34) \quad N_{\text{osc}}(E) = N(E) - \langle N(E) \rangle.$$

Dans le cas hamiltonien, $N_{\text{osc}}(E)$ est le même que dans la théorie des matrices aléatoires, avec des statistiques dictées par les symétries du système.

Cette analogie a amené à l'idée (cf. [18]) de l'existence d'un certain “flot de Riemann” hypothétique. Ce serait un système hamiltonien (X, h) qui ferait découler l'équation (2.29) de l'équation (2.33). Il concorderait également avec la formule heuristique, obtenue naïvement en appliquant la fonction $\frac{1}{\pi} \mathfrak{J} \log$ à la formule du produit eulérien en utilisant (2.27),

$$(2.35) \quad N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{-1}{\pi} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin(m E \log p)$$

avec la formule semi-classique pour la partie oscillante $N_{\text{osc}}(E)$ dans le cas hamiltonien. Cette dernière est de la forme

$$(2.36) \quad N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right)} \sin(m E T_{\gamma}^{\#}),$$

où les γ_p sont les orbites primitives ergodiques du système, $T_{\gamma}^{\#}$ est la période de l'orbite primitive γ_p , la variable m correspondant au nombre de traversées de cette orbite, et les $\pm\lambda_p$ sont les exposants d'instabilité correspondant.

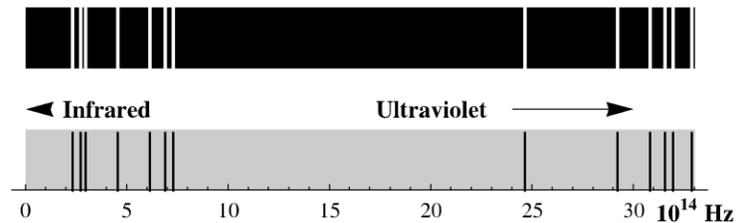


FIGURE 5. Spectre des fréquences d'émission et d'absorption de l'hydrogène.

On peut obtenir des informations intéressantes sur les propriétés d'un tel flot de Riemann conjectural en comparant les formules (2.35) et (2.36). Pourtant, alors que les différents termes dans (2.35) semblent avoir une signification claire dans cette analogie, il y a un sérieux problème qui surgit du signe global “moins” en tête de (2.35), qui ne peut pas être pris en compte dans (2.36), même si on essaye

de jouer avec les indices de Maslov.

Une solution à ce problème de signe a été donnée par Connes dans [71]. Une interprétation physique peut en être donnée. En physique quantique, les spectres observés sont de deux sortes (cf. Figure 5). Les spectres d'émission apparaissent comme des raies brillantes sur un fond sombre et sont engendrées par les photons émis des fréquences correspondantes. Les spectres d'absorption apparaissent comme des raies sombres sur un fond clair, et ressemblent à des “négatifs” des spectres d'émission. Il y a une différence fondamentale entre les deux sortes de spectres due à la présence du spectre continu de la lumière blanche qui est le fond de tous les spectres d'absorption. Les lignes sombres correspondent à des lacunes dans le spectre continu dues à l'absorption de ces photons qui ont la bonne fréquence pour induire des transitions atomiques pendant leur trajectoire de la source de la lumière blanche à la plaque photographique. Alors que les atomes excités ré-émettent des photons de la même fréquence, les directions de ces photons réémis sont aléatoires et ce manque de cohérence est responsable des lignes sombres d'“absorption” dans le spectre. Ces lignes sombres ne seraient pas visibles si elles étaient étroites, mais elles ont une épaisseur naturelle due à plusieurs causes, la plus simple étant la durée de vie de l'état excité et la présence des cutoffs infrarouge et ultraviolet. Pour dire cela mathématiquement, comme nous en discuterons par la suite, parler d'un spectre d'absorption est semblable au fait de considérer un conoyau et on verra que la présence des cutoffs joue également un rôle important dans cette formulation.

3.2. Forme symplectique et hamiltonien d'échelle.

On commence par calculer le volume symplectique (2.33) pour le système mécanique classique avec comme espace des phases $T^*\mathbb{R}$, l'espace cotangent de la droite réelle, et l'hamiltonien classique $h(q, p)$ qui engendre le groupe des transformations d'échelle. Plus précisément, on considère le produit $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ du groupe additif \mathbb{R} par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}}$ et on utilise le bicaractère

$$(2.37) \quad e_{\mathbb{R}}(p, q) = \exp(-2\pi i p q)$$

pour identifier $\widehat{\mathbb{R}}$ et \mathbb{R} . Dans cette notation, $\frac{\partial}{\partial q}$ correspond à $-2\pi i p$ et le générateur $i q \frac{\partial}{\partial q}$ des transformations d'échelle correspond à $2\pi q p$. Par conséquent, l'hamiltonien $h(q, p)$ est de la forme

$$(2.38) \quad h(q, p) = 2\pi q p.$$

La forme canonique symplectique

$$(2.39) \quad \omega = dp \wedge dq$$

est le produit de la mesure de Haar sur \mathbb{R} par la mesure de Haar duale sur $\widehat{\mathbb{R}}$.

Désignons par X le quotient de $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ par la symétrie discrète $(p, q) \mapsto (-p, -q)$. Le volume symplectique d'un sous-ensemble de X est la moitié du volume symplectique de sa pré-image dans $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$. L'hamiltonien $h(q, p)$ n'est pas positif, mais ceci est conforme à la symétrie $\frac{1}{2} + iE \mapsto \frac{1}{2} - iE$ existant entre les zéros de partie imaginaire positive et négative de ζ . Cette symétrie montre que nous devrions comparer

$$(2.40) \quad 2N(E) = \#\{\rho \mid \zeta^*(\rho) = 0, |\Im \rho| \leq E\}$$

avec le volume symplectique de $|h| \leq E$ dans (2.33), i.e. avec le volume symplectique de la région satisfaisant

$$|qp| \leq \frac{E}{2\pi}.$$

On introduit un cutoff Λ à la fois dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet en imposant les conditions

$$(2.41) \quad |q| \leq \Lambda, \quad p \leq \Lambda.$$

On calcule alors le volume symplectique $v(E)$ du sous-ensemble B de X :

$$(2.42) \quad B = \{(q, p) : |h| \leq E, \quad |q| \leq \Lambda, \quad |p| \leq \Lambda\}.$$

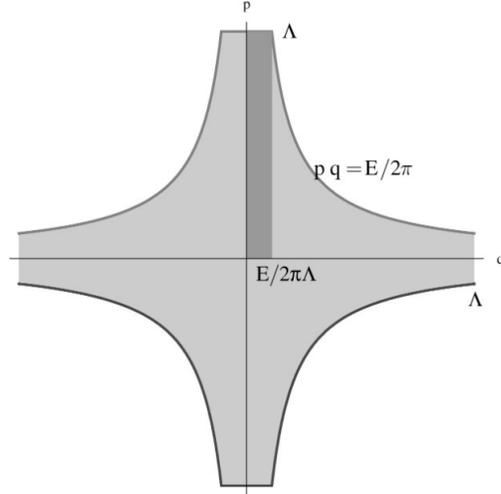


FIGURE 6. Le sous-ensemble B du plan (q, p) .

Par construction, B est l'image dans X de l'union de quatre régions congruentes à son intersection B_+ avec le premier quadrant, comme on le voit sur la Figure 6.

Par conséquent, le volume symplectique $v(E)$ de la région B dans X est donné par deux fois le volume symplectique de B_+ ,

$$v(E) = 2\text{Vol}(B_+).$$

Remarquons que B_+ est l'union du rectangle de côtés $\frac{E}{2\pi\Lambda}$ et Λ et de la région sous le graphe, dans le domaine allant de $q = \frac{E}{2\pi\Lambda}$ à $q = \Lambda$ de l'hyperbole $2\pi pq = E$. On suppose que $\Lambda > \left(\frac{E}{2\pi}\right)^{1/2}$. Par conséquent, on a

$$(2.43) \quad \int_{B_+} \omega = \frac{E}{2\pi} + \int_{E/2\pi\Lambda}^{\Lambda} \frac{E}{2\pi q} dq.$$

Cela donne

$$(2.44) \quad \text{Vol}(B_+) = \frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right).$$

Dans cette formule, on voit que le terme global $\langle N(E) \rangle$ de (2.28) apparaît avec un signe *moins*, sous la forme

$$(2.45) \quad - \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right).$$

Dans le § 5 ci-dessous, on raffine cette approximation semi-classique et on obtient dans la proposition 2.17 exactement $-\langle N(E) \rangle$ de (2.28) (et en particulier, le terme additionnel $\frac{7}{8}$) comme une correction quantique.

Les termes dans $\log \Lambda$ sont de la forme $\frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda$. Cela contribue à un facteur global de 2 à $v(E)$. Maintenant $2 \times \frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda$ est le volume symplectique dans la région cutoff

$$(2.46) \quad W(E, \Lambda) = \{(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid \lambda \in [\Lambda^{-1}, \Lambda], \quad |\theta| \leq E\}$$

dans le produit du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}_+^*} \simeq \mathbb{R}$. Ici on identifie $\widehat{\mathbb{R}_+^*}$ et \mathbb{R} en utilisant le bicaractère

$$(2.47) \quad \langle \lambda, \theta \rangle = \lambda^{i\theta}.$$

En fait, le produit de la mesure de Haar sur \mathbb{R}_+^* par la mesure de Haar duale sur \mathbb{R} est donné par

$$(2.48) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d\lambda}{\lambda} \times d\theta.$$

Par conséquent, on peut voir clairement, déjà à ce niveau grossier semi-classique, que le volume symplectique $v(E)$ pour le flot d'échelle sur X est donné par la différence

$$(2.49) \quad v(E) = \text{Vol}(W(E, \Lambda)) - 2\langle N(E) \rangle,$$

où $2\langle N(E) \rangle$ est la partie moyenne de la fonction de comptage $2N(E)$ de (2.40).

Cela suggère que le flot d'échelle sur X peut être regardé comme une première approximation d'un système classique dont la quantification amène une interprétation spectrale des zéros de zeta, non pas comme un spectre d'émission mais comme un spectre d'absorption, avec les zéros étiquetant les raies spectrales manquantes, alors que $\text{Vol}(W(E, \Lambda))$ rend compte du fond de lumière blanche.

Malgré la première difficulté, qui est de quantifier le système ci-dessus et de remplacer le calcul de l'aire simple par le comptage des modes de l'hamiltonien quantique, la principale difficulté vient du fait de devoir prendre en compte tous les termes additionnels qui entrent dans la partie oscillante de $N(E)$ comme elle est donnée dans (2.27). On va commencer par la première question, i.e. compter les modes de l'hamiltonien du système quantique.

3.3. Le système quantique et les fonctions prolate.

Passer du système classique au système en mécanique quantique remplace l'intégration de la forme

symplectique sur une région de l'espace des phases par un comptage des états quantiques dont l'énergie est en-dessous d'une certaine limite.

Le système classique (X, h) décrit dans le § 3.2 ci-dessus est facile à quantifier. L'espace de Hilbert de la mécanique quantique est simplement donné par

$$(2.50) \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})^{\text{paire}},$$

c'est-à-dire, l'espace des fonctions *paires* de carré intégrable $f(q)$. Obliger les fonctions à être paires reflète simplement la symétrie discrète $(p, q) \mapsto (-p, -q)$ définissant X dans le paradigme classique.

L'hamiltonien H engendre le groupe des transformations d'échelle, qui est donné par la représentation naturelle ϑ_a de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} , de la forme

$$(2.51) \quad (\vartheta_a(\lambda)f)(q) = f(\lambda^{-1}q).$$

Celui-ci est unitaire après multiplication par $|\lambda|^{-1/2}$ de telle façon que la représentation

$$(2.52) \quad \lambda \mapsto |\lambda|^{-1/2}\vartheta_a(\lambda)$$

est unitaire. Pour $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on définit les opérateurs correspondant

$$(2.53) \quad \vartheta_a(h) = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(\lambda)\vartheta_a(\lambda)d^*\lambda$$

avec $d^*\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda}$ la mesure de Haar multiplicative sur \mathbb{R}_+^* .

Au cutoff infrarouge $|q| \leq \lambda$, correspond la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace

$$(2.54) \quad P_\Lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R})^{\text{paire}} \mid f(q) = 0, \forall q \text{ avec } |q| > \Lambda\}.$$

Pour définir le cutoff ultraviolet $|p| \leq \Lambda$, on utilise la transformée de Fourier, qui est définie comme suit pour les groupes localement abéliens :

DÉFINITION 2.2. *Soient A, B une paire de groupes localement abéliens dont les mesures de Haar sont da, db . Soit $\alpha(a, b)$ un bicaractère qui donne un isomorphisme $B \sim \widehat{A}$ de B avec le dual de A . Alors la transformation de Fourier \mathbf{F}_α est définie par*

$$(2.55) \quad \mathbf{F}_\alpha(f)(b) := \int \alpha(a, b)f(a)da.$$

Le cutoff ultraviolet est donné par la projection orthogonale \widehat{P}_Λ donnée par le conjugué

$$(2.56) \quad \widehat{P}_\Lambda = \mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}} P_\Lambda \mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}.$$

Ici $\mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ est la transformation de Fourier associée au bicaractère $e_{\mathbb{R}}$ introduit ci-dessus en (2.37).

La première difficulté qu'on rencontre, qui est inhérente au système quantique, est le fait que les deux

cutoffs P_Λ et \widehat{P}_Λ ne commutent pas, par conséquent, on ne peut juste faire l'intersection de leurs domaines pour réaliser les deux cutoffs à la fois. En effet, aucune fonction non nulle sur \mathbb{R} ne peut avoir comme propriété qu'à la fois cette fonction et sa transformée de Fourier soient à support compact.

La position relative des deux projections (2.54) et (2.56) a été pour la première fois analysée dans le travail de Landau, Pollak et Slepian (cf. [246], [196], [197]) au début des années soixante, motivé par des problèmes d'ingénierie électrique.

Le résultat a été depuis considérablement précisé. Pour expliquer le point principal, rappelons d'abord au lecteur des faits bien connus sur la géométrie des paires de projections.

LEMME 2.3. *Donner une paire de projections orthogonales P_i , $i = 1, 2$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est la même chose que donner une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le produit libre de deux copies du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces représentations irréductibles sont paramétrées par un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$*

PREUVE. Aux générateurs U_i de Γ correspondent les opérateurs $2P_i - 1$. Le groupe Γ est le produit semi-direct du sous-groupe engendré par $U = U_1 U_2$ par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, agissant par $U \mapsto U^{-1}$. Les représentations irréductibles unitaires de Γ sont paramétrées par un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$ alors que les projections orthogonales correspondantes P_i sont associées aux sous-espaces de dimension 1, $y = 0$ et $y = x \tan(\alpha)$ dans le plan euclidien (x, y) . En particulier, ces représentations sont au plus 2-dimensionnelles. Les projections P_i sont données par

$$(2.57) \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Une représentation unitaire générale est caractérisée par un opérateur α dont la valeur est l'angle α dans le cas irréductible. Il est défini de manière unique par la condition $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ et par l'égalité

$$(2.58) \quad \sin(\alpha) = |P_1 - P_2|$$

et commute avec P_i . De façon équivalente, on a

$$(2.59) \quad P_1 P_2 P_1 = \cos^2(\alpha) P_1.$$

□

Ce que les auteurs ont fait dans les références [246], [196], [197] a consisté à analyser la position relative des projections P_Λ et \widehat{P}_Λ pour $\Lambda \rightarrow \infty$. Dans les problèmes concrets d'ingénierie électrique, cela rend possible la prise en compte de signaux qui, pour des raisons pratiques, sont de support fini à la fois selon la variable temporelle et selon la variable duale fréquentielle. Cela a eu un rôle important dans les débuts des développements de la technologie laser.

L'outil de base utilisé dans les références [246], [196], et [197] est l'existence d'un opérateur différentiel du second ordre \mathbf{W}_Λ sur \mathbb{R} , qui commute à la fois avec P_Λ et avec \widehat{P}_Λ . Cet opérateur est de la forme

$$(2.60) \quad (\mathbf{W}_\Lambda \psi)(q) = -\partial((\Lambda^2 - q^2)\partial)\psi(q) + (2\pi\Lambda q)^2 \psi(q).$$

Ici, le symbole ∂ dénote la différentiation ordinaire en une variable. Pour être plus précis, (2.60) définit un opérateur symétrique ayant comme domaine naturel l'espace de Schwartz.

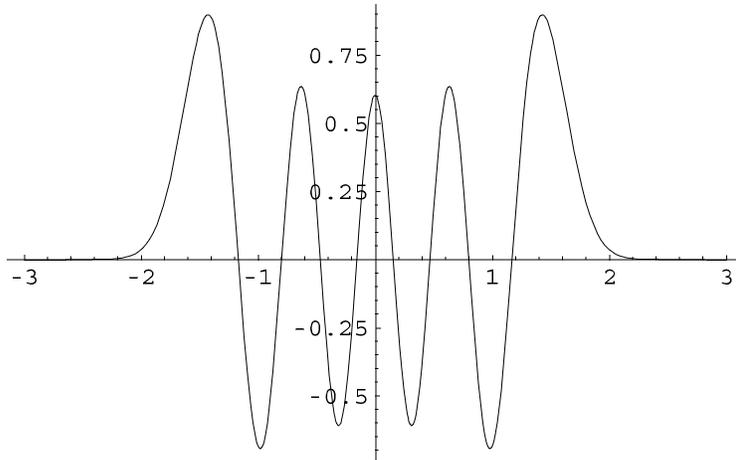


FIGURE 7. La fonction ψ_8 pour $\Lambda = 3$.

Rappelons (cf. [183]) que par définition, les indices de déficience $n_{\pm}(T)$ d'un opérateur symétrique T sont les dimensions de $\ker(T^* \pm i)$. On peut montrer que l'opérateur \mathbf{W}_{Λ} a deux indices de déficience égaux à 4 et qu'il admet une unique extension auto-adjointe qui commute avec le groupe diédral Γ associé aux projections P_{Λ} et \widehat{P}_{Λ} . On utilise la même notation \mathbf{W}_{Λ} pour désigner cet opérateur auto-adjoint. Il commute avec la transformation de Fourier $\mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}$.

Si l'on restreint la variable au domaine $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur \mathbf{W}_{Λ} a un spectre discret simple. Ses propriétés ont été étudiées il y a longtemps. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmholtz

$$(2.61) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

dans l'un des peu nombreux systèmes de coordonnées séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, appelé le système des *coordonnées sphéroïdales prolate*. Les valeurs propres $\chi_n(\Lambda)$, $n \geq 0$ de \mathbf{W}_{Λ} , listées en ordre croissant $\chi_{n+1} > \chi_n$, sont simples et positives. Les fonctions propres correspondantes sont appelées les fonctions d'onde sphéroïdales prolate. Puisque le produit $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$ commute avec \mathbf{W}_{Λ} , ce sont des fonctions propres de $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$. Par les résultats de [246], [196] et [197], les valeurs propres λ_n de l'opérateur $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$ sont simples. De plus, si on note $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n > \dots$ leur liste en ordre décroissant, on a

$$(2.62) \quad P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}\psi_n = \lambda_n\psi_n.$$

Par conséquent, les fonctions sphéroïdales prolate ψ_n sont les vecteurs propres de $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$ de valeurs propres associées non nulles.

On sait beaucoup de choses au sujet des fonctions sphéroïdales prolate ψ_n . En particulier, on peut faire en sorte qu'elles soient de valeurs réelles. Elles sont paires pour n pair et impaires pour n impair, et elles ont exactement n zéros dans l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$. On les normalise pour que leur norme L^2 soit égale à 1.

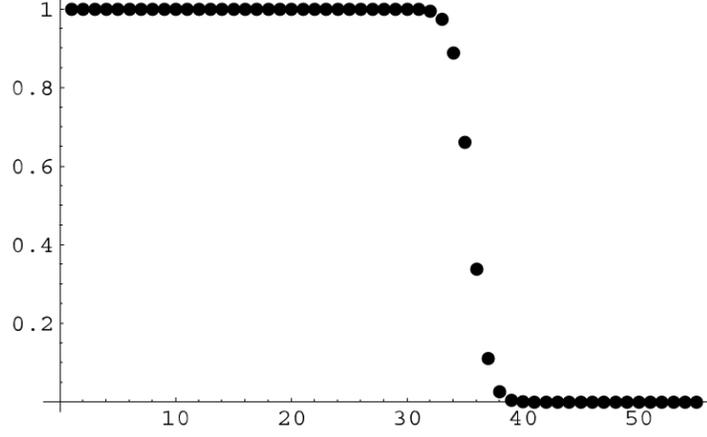


FIGURE 8. Les valeurs propres λ_n pour $\Lambda = 3$

Nous sommes seulement intéressés par les ψ_n pour les valeurs paires de n , puisque dans notre espace de Hilbert de mécanique quantique, nous nous restreignons aux fonctions paires. Lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$, la fonction ψ_n converge vers la fonction de Hermite-Weber Ω_n d'ordre n (cf. [272]).

Les valeurs propres λ_n se comportent qualitativement de la façon suivante, comme une fonction du cutoff. Elles restent proches de la valeur 1, $\lambda_n \sim 1$, jusqu'à ce que n tombe dans un intervalle I de taille $\sim \log \Lambda$ autour de la valeur $4\Lambda^2$. Leur comportement dans cet intervalle est gouverné par la relation (cf. [273], [198])

$$(2.63) \quad \lambda_n = (1 + e^{\pi\delta})^{-1},$$

où δ est la solution de plus petite valeur absolue de l'équation

$$(2.64) \quad (n + 1/2)\pi = 4\pi\Lambda^2 + \delta \log(8\pi\Lambda^2) - \delta(\log(|\delta/2|) - 1).$$

Au-delà de l'intervalle I , les valeurs propres λ_n tendent très rapidement vers zéro. Un graphique est présenté sur la Figure 8.

Pour la paire de projections P_Λ et \widehat{P}_Λ , on obtient de cette façon les valeurs propres α_n de l'opérateur d'angle α du Lemme 2.3 par (2.59), i.e.

$$(2.65) \quad \cos^2(\alpha_n) = \lambda_n.$$

Cela montre que l'angle α_n est principalement 0 jusqu'à un intervalle I de taille $\sim \log \Lambda$ autour de la valeur $n \sim 4\Lambda^2$. Il se décale alors de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et reste principalement égal à $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs plus grandes de n . Cela montre clairement comment imposer à la fois un cutoff ultraviolet et un cutoff infrarouge en se restreignant au sous-espace B_Λ de \mathcal{H} étendu par les ψ_{2n} pour $2n \leq 4\Lambda^2$. Aucun soin particulier n'est requis pour définir précisément une borne supérieure, puisqu'on peut montrer que, pour tout n dans l'intervalle I considéré ci-dessus et pour tout $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$(2.66) \quad \|\vartheta_a(h)\psi_n\| = O(\Lambda^{-\rho})$$

pour un certain $\rho > 0$, et avec $\vartheta_a(h)$ comme dans (2.53). On dénote par Q_Λ la projection orthogonale sur $B_\Lambda \subset \mathcal{H}$.

Venons-en maintenant au problème du comptage du nombre des états du système mécanique quantique, dont l'hamiltonien H voit son énergie limitée par $|H| \leq E$ (i.e. le générateur des transformations d'échelle). L'hamiltonien H est le générateur de l'action d'échelle de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} et on identifie, comme précédemment, le groupe dual de \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} en utilisant le bicaractère (2.47).

LEMME 2.4. *Soit N_E la projection spectrale de l'action d'échelle de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} , associée à l'intervalle $[-E, E]$ dans le groupe dual \mathbb{R} de \mathbb{R}_+^* . Elle est donnée par*

$$(2.67) \quad N_E = \vartheta_a(h_E), \quad \text{avec } h_E(u) = |u|^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-E}^E |u|^{is} ds,$$

avec $\vartheta_a(h_E)$ défini par (2.53).

PREUVE. Comme on l'a vu précédemment, (2.52) donne une action unitaire de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} , de telle façon que (2.67) découle de l'identité

$$\int \lambda^{it} k(\lambda) d^* \lambda = \mathbf{1}_{[-E, E]}(t)$$

pour la fonction $k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-E}^E \lambda^{is} ds$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut maintenant formuler le problème du comptage des états quantiques du flot d'échelle de la façon suivante.

REMARQUE 2.5. Compter le nombre d'états quantiques de l'hamiltonien H sujet à la contrainte $|H| \leq E$ revient à calculer la dimension de l'intersection proche³ des projections Q_Λ et N_E . Cela est donné par $\text{Tr}(Q_\Lambda N_E)$.

Pour calculer $\text{Tr}(Q_\Lambda N_E)$ pour de grandes valeurs de Λ , on peut utiliser l'analyse de l'opérateur d'angle entre P_Λ et \widehat{P}_Λ décrit précédemment avec (2.66) et remplacer Q_Λ par

$$(2.68) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda,$$

ce qui introduit un terme d'erreur de l'ordre de $O(\Lambda^{-\rho} \log \Lambda)$. Par conséquent, pour compter le nombre d'états quantiques dans l'intersection proche des deux projections Q_Λ et N_E , on a juste besoin de calculer

$$(2.69) \quad \text{Tr}(Q_\Lambda N_E) \sim \text{Tr}(R_\Lambda \vartheta_a(h_E)).$$

Il reste par conséquent à calculer $\text{Tr}(R_\Lambda \vartheta_a(h))$. On applique alors le résultat suivant ([71], Théorème 3), qui est valide pour tout corps local et est un cas particulier du théorème 2.36 qui sera prouvé dans

³?

la suite, au § 7.2.

THÉORÈME 2.6. *Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ une fonction paire ($h(-u) = h(u)$) à support compact, et $\vartheta_a(h)$ défini comme dans (2.53). Alors $R_\Lambda \vartheta_a(h)$ est un opérateur de classe trace. De plus, pour $\Lambda \rightarrow \infty$, on a*

$$(2.70) \quad \text{Tr}(R_\Lambda \vartheta_a(h)) = 2h(1) \log \Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1).$$

On souhaite appliquer cette formule à la fonction $h = h_E$ de (2.67). Notons que cette fonction n'est pas à support compact, donc en principe, le résultat ne s'applique pas directement. On doit prendre garde à ce point technique dans le § 5.1 ci-après. Dans (2.70), l'intégrale est singulière en $u = 1$ et le théorème 2.6 sélectionne une valeur principale spécifique, dénotée par \int' , dont nous allons discuter en détail dans le § 4 ci-dessous.

Références

- [18] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, Lecture Notes in Physics, Vol.263, Springer-Verlag, 1986.
- [71] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Selecta Math.* (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [126] H.M. Edwards, Riemann's zeta function, Dover, 2001.
- [183] T. Kato, Perturbation theory of linear operators *Grundlehren der Mathematischen*, Vol.132, Springer, 1966.
- [196] H.J. Landau, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.* Vol.40 (1961).
- [197] H.J. Landau, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.* Vol.41 (1962).
- [198] H.J. Landau, H. Widom, Eigenvalue distribution of time and frequency limiting, *J. Math. Analysis and Appl.* Vol.77 (1980), 469–481.
- [201] H. Laurent, Sur la théorie des nombres premiers. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 126 (1898) 809–810.
- [240] S. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann Zeta-function, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [246] H.O. Pollak, D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, *Bell Syst. Tech. Journal*, Vol.40 (1961), 43–64.

- [255] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatder Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860) 671–680. (English translation in M.H.Edwards “Riemann’s zeta function”, Dover 2001.)
- [272] R. Sips, Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d’onde sphéroïdales, Trans. Am. Math. Soc. Vol.66 (1949), 93–134.
- [273] D. Slepian, Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions, J. Math. Phys. Vol.44 (1965), 99–140.