Une nouvelle preuve du théorème de Morley

Alain Connes

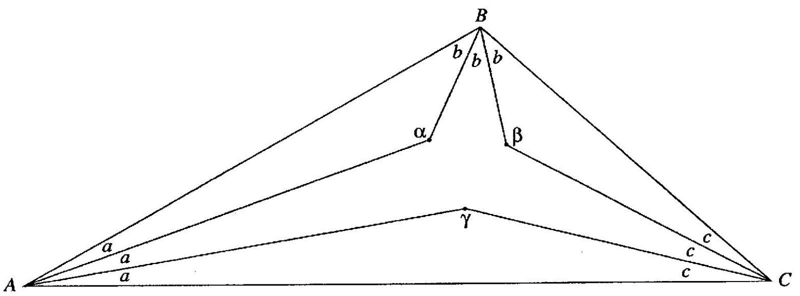
Cela fait maintenant 22 ans que l'IHÉS m'a offert l'hospitalité. J'ai appris ici la plupart des mathématiques que je connais, principalement grâce à des conversations impromptues au déjeuner avec des visiteurs ou des membres permanents.

Quand je suis arrivé, j'étais obnubilé par mon propre travail et j'ai éprouvé un sentiment d'humilité en réalisant à quel point je comprenais peu ce dont il était alors question dans les discussions habituelles. Dennis Sullivan prit soin de moi, et me donna un cours rapide en géométrie qui a influencé ma manière de penser pour le reste de ma vie.

C'est aussi à Bures, grâce aux physiciens, que j'ai compris la véracité d'une phrase de J. Hadamard sur la profondeur des concepts mathématiques venant de la physique :

"Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut influencer que le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses."

Pour donner un peu l'esprit de l'atmosphère de compétition conviviale caractéristique de l'IHÉS, j'ai choisi l'exemple spécifique d'une conversation que nous avons eue lors d'un déjeuner au printemps dernier et qui m'a amené à un nouveau résultat amusant.



Vers 1899, F. Morley prouva un théorème remarquable sur la géométrie élémentaire des triangles Euclidiens :

"Etant donné un triangle A, B, C, les intersections 2 à 2, α, β, γ des trissectrices sont les sommets d'un triangle équilatéral" (*cf.* Fig. 1).

L'un de nous mentionna ce résultat pendant le déjeuner et l'attribua (par erreur) à Napoléon. Bonaparte avait effectivement étudié les mathématiques dans son jeune âge et, en plus d'apprendre l'anglais, il enseignait les mathématiques au fils de Las Cases pendant son exil de Sainte Hélène à Longwood.

C'était la première fois que j'entendais parler du résultat de Morley et quand je suis rentré chez moi, suivant l'un des conseils de Littlewood, j'ai commencé à chercher une preuve, non pas dans les livres mais dans ma tête. Ma seule motivation en plus de la curiosité était le challenge évident "c'est l'un des rares exploits de Bonaparte auquel je devrais pouvoir m'attaquer". Après quelques tentatives infructueuses, j'ai vite réalisé que les intersections de trissectrices consécutives sont les points fixes de produits

1. Ce texte provient de l'ouvrage fêtant les 40 ans de l'IHÉS intitulé Les relations entre les mathématiques et la physique théorique, IHÉS, 1998, p. 43-46

2. Collège de France, Paris, et IHÉS, 91440 Bures-sur-Yvette, France.

de 2 rotations g_i autour des sommets du triangle (rotations d'angles égaux à deux tiers des angles correspondant du triangle). Il était alors naturel de chercher la symétrie g du triangle équilatéral comme un élément du groupe Γ engendré par les trois rotations g_i. Maintenant, il était facile de construire un exemple (en géométrie sphérique) qui montre que le théorème de Morley ne peut s'appliquer en géométrie non-euclidienne, de telle façon que la preuve devait utiliser des propriétés euclidiennes particulières du groupe des isométries.

Du coup, je passais quelque temps à essayer de trouver une formule de g en fonction des g_i, en utilisant la construction simple (toute isométrie d'angle $2\pi/n, n \geq 2$ est automatiquement d'ordre n), de plein d'éléments d'ordre 3 dans le groupe Γ, comme $g_1g_2g_3$. Après beaucoup d'efforts, je réalisais que c'était en vain (*cf.* Rem. 2 ci-dessous) et que le groupe qui intervient est le groupe affine de la droite, plutôt que le groupe d'isométrie du plan.

Le but de cette courte note est de donner une preuve conceptuelle du théorème de Morley comme propriété théorique du groupe de l'action du groupe affine sur la droite. Il sera valide pour tout corps (commutatif) k (de caractéristique arbitraire, même si en caractéristique 3, l'hypothèse du théorème ne peut être remplie). Ainsi soit k un tel corps et G le groupe affine sur k, en d'autres termes, le groupe des matrices 2×2 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $a \in k, a \neq 0, b \in k$. Pour $g \in G$, posons

$$\delta(g) = a \in k^*. \tag{1}$$

Par construction, δ est un morphisme de G dans le groupe multiplicatif k^* des éléments non nuls de k, et le sous-groupe $T = \text{Ker } \delta$ est le groupe des translations, i.e. le groupe additif de k. Chaque $g \in G$ dans G définit une transformation,

$$g(x) = ax + b \qquad \forall x \in k, \tag{2}$$

et si $a \neq 1$, elle admet un et un seul point fixe,

$$fix(g) = \frac{b}{1-a}. \tag{3}$$

Prouvons le simple fait suivant :

Théorème. Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$ tels que g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 et $g_1g_2g_3$ ne sont pas des translations et posons $j = \delta(g_1g_2g_3)$. Les conditions suivantes sont équivalentes,

a) $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$.

b) $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ où $\alpha = fix(g_1g_2), \beta = fix(g_2g_3), \gamma = fix(g_3g_1)$.

Preuve. Posons $g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'égalité $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ est équivalente à $\delta(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$, et $b = 0$, où b est la partie translationnelle de $g_1^3g_2^3g_3^3$. La première condition est exactement $j^3 = 1$. Notons que $j \neq 1$ par hypothèse. Alors on a

$$b = \left(a_1^2 + a_1 + 1\right) b_1 + a_1^3 \left(a_2^2 + a_2 + 1\right) b_2 + (a_1a_2)^3 \left(a_3^2 + a_3 + 1\right) b_3. \tag{4}$$

Un calcul évident, en utilisant le fait que $a_1a_2a_3 = j$ donne,

$$b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma), \tag{5}$$

où, α, β, γ sont les points fixes de

$$\alpha = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}, \beta = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}, \alpha = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}. \tag{6}$$

Maintenant, $a_k - j \neq 0$ puisque par hypothèse, les produits deux à deux des g_j *ne sont pas* des translations. Ainsi, et quelque soit la caractéristique de k, nous obtenons que a) $\Leftrightarrow$ b).

Corollaire. Théorème de Morley.

Démonstration. Prenons $k = \mathbb{C}$ et définissons g_1 comme la rotation de centre A et d'angle $2a$, où $3a$ est l'angle BAC et de manière similaire pour g_2 et g_3. On a $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ puisque chaque g_i^3 peut être exprimé comme le produit des symétries le long des côtés consécutifs. De plus, pour une raison similaire $\alpha = fix(g_1 g_2), \beta = fix(g_2 g_3), \gamma = fix(g_3 g_1)$ sont les intersections des trissectrices. Ainsi, de a) $\Rightarrow$ b), on obtient $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ qui est une caractérisation classique des triangles équilatéraux.

Remarque 1. Sans altérer les cubes g_1^3, g_2^3, g_3^3, on peut multiplier chaque g_i par une racine cubique de 1, on obtient de cette manière les 18 triangles équilatéraux non-dégénérés des variantes du théorème de Morley.

Remarque 2. Nous montrerons maintenant qu'en général, la rotation g qui permute cycliquement les points α, β, γ n'appartient pas au sous-groupe Γ de G engendré par g_1, g_2, g_3. Sous l'hypothèse du théorème, on peut supposer que le corps k contient une racine cubique de l'unité non triviale, $j \neq 1$, et que de ce fait, sa caractéristique n'est pas égale à 3. La rotation qui permute cycliquement les points α, β, γ est ainsi l'élément de G donné par,

$$g = \begin{bmatrix} j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 3b = (1-j)(\alpha+\beta+\gamma). \tag{7}$$

Maintenant, pour tout élément $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ du groupe Γ engendré par g_1, g_2, g_3, on a les polynômes de Laurent P_i en les variables a_j tels que,

$$b = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3. \tag{8}$$

Ainsi, en exprimant, avec les notations ci-dessus b_i en termes de α, β, γ,

$$\begin{array}{lllll} b_1 = (1+j)^{-1}\big(a_3^{-1} & (a_3 - j)\alpha - & (a_1 - j)\beta + a_1 & (a_2 - j)\gamma\big) \\ b_2 = (1+j)^{-1}\big(a_2 & (a_3 - j)\alpha + a_1^{-1} & (a_1 - j)\beta - & (a_2 - j)\gamma\big) \\ b_1 = (1+j)^{-1}\big(- & (a_3 - j)\alpha + a_3 & (a_1 - j)\beta + a_2^{-1} & (a_2 - j)\gamma\big) \end{array} \tag{9}$$

nous obtenons les polynômes de Laurent Q_i tel que,

$$b = (a_3 - j)\alpha Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3. \tag{10}$$

On peut alors supposer qu'on a trouvé des polynômes de Laurent Q_i tel que pour tout $a_1, a_2, a_3 \in k^*$, avec $a_1 a_2 a_3 = j$, et tout $\alpha, \beta, \gamma \in k$ avec $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, l'identité suivante est vérifiée,

$$(1-j)(\alpha+\beta+\gamma) = 3((a_3 - j)Q_1 + (a_1 - j)\beta Q_2 + (a_2 - j)\gamma Q_3). \tag{11}$$

Nous choisissons alors $a_1 = j, a_2 = j, a_3 = j^2, \alpha = 0, \beta = -j, \gamma = 1$ et obtenons une contradiction. En passant au corps des fonctions sur k, cela suffit à démontrer que, en général, $g \notin \Gamma$.