Extrait du résumé du cours au Collège de France d'Alain Connes en janvier 1999 concernant la formule de trace et la fonction ζ de Riemann

Théorème 5. *Soient k un corps global de caractéristique non nulle et Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les $f \in \mathscr{S}(A)$ tels que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'annulent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathscr{S}(C_k)$ une fonction à support compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}(Q_\Lambda(U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^* u + o(1) \,;$$

b) *Toutes les fonctions L sur k satisfont l'hypothèse de Riemann.*

Si k est un corps global de caractéristique nulle, on n'a plus la commutation des projecteurs P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$ à cause des places archimédiennes. Pour résoudre ce problème, on se concentre sur le cas de la place réelle. On a alors les deux projecteurs orthogonaux P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $\widehat{P_\Lambda} = FP_\Lambda F^{-1}$ pour la transformation de Fourier associée au caractère $x \mapsto \exp(ix)$ de $\mathbb{R}$. Le point-clef, dû à Landau, Pollack et Slepian est la commutation de P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$ avec l'opérateur différentiel du second ordre

$$\Delta_\Lambda = -\partial(\Lambda^2 - x^2)\partial + \Lambda^2 x^2. \tag{21}$$

Plus précisément, on démontre :

Lemme 6. *L'opérateur Δ_Λ défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est symétrique, ses indices de défaut sont tous deux égaux à 4 et il admet une unique extension auto-adjointe qui commute à la fois avec P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$.*

En posant $U = 2P_\Lambda - 1$, $V = 2\widehat{P_\Lambda} - 1$, on obtient une représentation du groupe produit libre de deux groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à 2 éléments, c'est-à-dire du groupe diédral. Les représentations irréductibles de ce groupe sont indexées par les orbites de l'involution $z \mapsto \bar{z}$ dans le dual de Pontrjagin $U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ du groupe $\mathbb{Z}$.

La décomposition en somme directe de représentations irréductibles de la représentation π_Λ associée à $(P_\Lambda, \widehat{P_\Lambda})$ s'obtient en diagonalisant l'opérateur $(P_\Lambda \widehat{P_\Lambda} P_\Lambda$ dans $L^2([-\Lambda, \Lambda]))$ et l'on a,

(22) Les valeurs propres de $P_\Lambda \widehat{P_\Lambda} P_\Lambda$ sont simples et de la forme

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1}, \quad \lambda_n \to 0 \quad n \to \infty.$$

(23) Le vecteur propre de $P_\Lambda \widehat{P_\Lambda} P_\Lambda$ associé à λ_n est la n-ième fonction sphéroïdale, i.e. la n-ième fonction propre de l'opérateur Δ_Λ restreint à l'intervalle $L^2([-\Lambda, \Lambda])$.

Référence : A. Connes, Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta. Annu. Collège de France 95 (1998), pp. 115–122.
https://www.college-de-france.fr/sites/default/files/documents/alain-connes/UPL8550790458066685627_AN_99_connes.pdf.
Transcription : Denise Vella-Chemla, 9 décembre 2024