

## Extrait d'un article de Masamichi Takesaki <sup>1</sup>, dans lequel il décrit entre autres l'un des apports d'Alain Connes

En étudiant la relation entre la classification d'Araki-Woods des facteurs ITPFI et les conditions KMS, A. Connes a montré en 1971 que l'ensemble des rapports asymptotiques  $r_\infty(\mathcal{M})$  d'un facteur ITPFI  $\mathcal{M}$  est bien l'intersection du spectre  $S_p(\Delta_\varphi)$  de tous les opérateurs modulaires possibles  $\Delta_\varphi$  : il a ainsi introduit un nouvel invariant algébrique, le spectre modulaire :

$$S(\mathcal{M}) = \bigcap \{S_p(\Delta_\varphi) : \varphi \text{ couvre tous les poids sur } \mathcal{M}\}.$$

Lui et Van Daele ont ensuite montré en 1972 que  $S(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$  est un sous-groupe fermé du groupe multiplicatif sur  $\mathbb{R}_+^*$  si  $\mathcal{M}$  est un facteur ; ainsi on avait une nouvelle classification des facteurs de type III. Un facteur  $\mathcal{M}$  est dit :

- de type  $\text{III}_\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , si  $S(\mathcal{M}) = \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$  ;
- de type  $\text{III}_0$  si  $S(\mathcal{M}) = \{0, 1\}$  ;
- de type  $\text{III}_1$  si  $S(\mathcal{M}) = \mathbb{R}_+^*$ .

Par conséquent, les facteurs distingués par R. Powers étaient bien des facteurs de type  $\text{III}_\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , avec  $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$ , où  $\mu$ ,  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ , est un nombre définissant un état  $\omega_\mu$  sur les algèbres matricielles  $2 \times 2$  par

$$\omega_\mu \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \mu x_{11} + (1 - \mu)x_{22}.$$

---

<sup>1</sup>Masamichi Takesaki, *Factors of Type III*, Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S4, "International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics", , p. 1-25.