Questions posées à Alain Connes dans le livre Mathématiques, un dépaysement soudain

Une démonstration est-elle éternelle ? Un théorème est-il éternel ?

La position du raisonnement mathématique par rapport à la vérité mathématique est analogue à celle des déductions du tribunal par rapport à la réalité extérieure. Un raisonnement juste est éternel mais il ne dévoile qu'une réalité partielle. Si l'on s'en tient même aux propriétés des entiers naturels, la plupart des propriétés vraies sont non démontrables à partir des axiomes de Peano. Un exemple simple est le fait que ce soit la tortue qui gagne dans la fable suivante du lièvre et de la tortue. L'on part d'un entier n par exemple $n = 9$ et on l'écrit en base 2. $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi tous les exposants en base 2, et ainsi de suite s'il y a à nouveau des exposants, de sorte que dans notre exemple on écrit l'exposant $3 = 2 + 1$ et $9 = 2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3, ce qui remplace 9 par $3^{3+1} + 1$, la tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 3, puis remplace tous les 3 par des 4, ce qui dans notre exemple donne 4^{4+1}. La tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 4, ce qui donne $3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$, puis remplace tous les 4 par des 5, la tortue soustrait 1 et ainsi de suite. Eh bien, l'on sait démontrer grâce à la théorie des nombres ordinaux que, comme dans la fable, c'est la tortue qui gagne, c'est-à-dire que quel que soit l'entier n dont on parte, on arrivera toujours à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes, malgré les bonds prodigieux du lièvre ! L'on sait aussi que l'énoncé "pour tout n c'est la tortue qui gagne" n'est pas démontrable au sein de l'arithmétique de Peano, de même que la non-contradiction de cette arithmétique n'est pas démontrable en son sein ! On peut comprendre que le nombre de pas nécessaires est extrêmement grand en prenant l'exemple très simple $n = 4$ pour lequel le nombre de pas est de l'ordre de $10^{121210694}$.

Vous souvenez-vous d'un rêve mathématique ?

La recherche mathématique se nourrit du "rêve" bien que celui-ci n'ait aucun droit de cité officiel, mais reste l'expression la plus pure de l'intuition. Mon "rêve" actuel a trait aux nombres que l'on définit, comme le faisait Euler, à partir d'expressions asymptotiques mais divergentes tels les nombres qui apparaissent naturellement dans les calculs de physique quantique. Ils sont définis de manière ambiguë et cette ambiguité n'implique plus des groupes finis comme dans la théorie de Galois, mais des groupes connexes comme ceux qui font encore défaut dans la théorie globale des corps de nombres.

Lorsque vous fermez les yeux, voyez-vous quelque chose de mathématique ?

Le propre du mathématicien est de créer des images mentales, c'est ainsi qu'une page de formules "parle" à un mathématicien, mais ces images mentales ont peu en commun avec la figuration du monde extérieur et n'ont de "sens" que de manière très intériorisée et difficilement transmissible.

Misha Gromov distingue quatre mystères dans le monde : la nature des lois de la physique, le mystère de la vie, le rôle du cerveau, le mystère de la structure mathématique reliée aux trois premiers. En voyez-vous autant, moins ou plus ?

L'on peut formuler nombre de questions. L'une des évolutions actuelles les plus frappantes est l'émergence progressive mais bien réelle d'une "super intelligence" qui se traduit par exemple au niveau de l'expérimentation en physique par l'expérience du LHC au CERN ou bien au niveau de la mémoire globale par Google. La puissance de l'ordinateur comme assistance au mathématicien est indéniable. Il reste heureusement ce terrain pour le moment inaccessible de l'intuition, de l'analogie où le cerveau humain a encore une avance considérable, que nous devons chérir et préserver à tout prix.

Le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons.

Texte extrait du livre Les déchiffreurs

L'impitoyable réalité

Préambule

Ce texte décrit une relation très personnelle avec les mathématiques, n'oublions pas que chaque mathématicien(ne) est un "cas particulier" et ce qui est dit ci-dessous n'engage que son auteur et ne saurait en aucun cas passer pour un point de vue "générique".

Les mathématiques sont de mon point de vue, avant toute chose, l'outil de pensée, le générateur de concepts, de loin le plus élaboré que nous ayons, simplement pour comprendre, en particulier, le monde qui nous entoure. Les nouveaux concepts sont engendrés par un lent processus de distillation dans l'alambic de la pensée.

Il est tentant au départ de vouloir diviser les mathématiques en domaines séparés comme la géométrie, science de l'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, qui donne accès à l'infini et au continu, la théorie des nombres, etc., mais ceci ne rend pas compte d'un trait essentiel du monde mathématique, à savoir qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence.

Acte de rébellion

En mathématiques de mon point de vue, le b a-ba c'est que l'on ne devient pas mathématicien en apprenant, on devient mathématicien en faisant des mathématiques. Donc ce n'est pas le "savoir" qui compte, ce qui est important, c'est le savoir-faire. Bien entendu, les connaissances sont absolument nécessaires - et il n'est pas question de faire table rase des savoirs acquis - mais j'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant devant un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Ainsi, à mes yeux, on commence à devenir mathématicien plus ou moins par un acte de rébellion !

En quel sens ? Au sens où le futur mathématicien va commencer à réfléchir à un certain problème, et il va s'apercevoir qu'en fait, ce qu'il lit dans la littérature, ce qu'il lit dans les bouquins, ne correspond pas à la vision personnelle qu'il a du problème. Bien sûr, très souvent, cela correspond en fait à de l'ignorance, mais cela est sans importance du moment qu'il s'appuie sur une intuition personnelle et, bien entendu, sur la démonstration. Ainsi peu importe, parce qu'il va comprendre à cette occasion qu'en mathématiques il n'y a pas d'autorité ! Un élève de douze ans peut très bien tenir tête à son professeur s'il a trouvé une démonstration de ce qu'il avance et que cela singularise les maths par rapport aux autres disciplines où le professeur aurait beau jeu de se retrancher derrière des connaissances que l'élève n'aura pas. Un enfant de cinq ans peut dire à son père "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre" et en être sûr, non parce qu'il l'a lu dans les livres mais parce qu'il en a trouvé une démonstration dans sa tête... Il y a un espace de liberté grand ouvert à celui qui sait le découvrir en respectant ses règles. Et la première chose qui compte, c'est de devenir soi-même sa propre autorité. C'est-à-dire, pour comprendre quelque chose, ne pas chercher tout de suite à vérifier si c'est écrit dans un livre, non ! Cela ne ferait que retarder l'éveil à cette indépendance. Ce qu'il faut, c'est vérifier dans sa tête que c'est comme ça. A partir du moment où l'on a compris cela, on peut, petit à petit, devenir très familier avec une toute petite portion du territoire mathématique et commencer un long parcours à travers ces territoires merveilleux que l'on essaie de dévoiler depuis son repère personnel.

Elan poétique

On peut dire qu'il y a deux aspects dans la tâche du mathématicien, il y a celui qui consiste à démontrer, à vérifier, etc., et qui demande une intense concentration, qui demande un rationalisme exacerbé, mais heureusement, il y a aussi l'aspect vision ! Et cet aspect vision, c'est un peu comme une mise en mouvement par l'intuition, qui n'obéit pas à des certitudes mais est plus proche d'une attirance de nature poétique. En simplifiant, il y a deux temps dans la découverte mathématique. Il y a un premier temps dans lequel l'intuition n'est pas encore formulable en termes transmissibles de manière rationnelle. Et dans cette période-là, ce qui compte, c'est la vision ! Non pas le côté statique, mais un espèce d'élan poétique.

Cet élan poétique est presque impossible à transmettre par les mots. Lorsqu'on essaie de le transmettre, lorsqu'on essaie de le dire, on arrive presque à le statufier, pour ainsi dire, et on perd cette espèce de mouvement qui est essentiel dans la découverte.

Ensuite, lorsqu'on a mis en place suffisamment de pièces du puzzle, et qu'on s'aperçoit que cette vision se traduit par des résolutions de problèmes, les choses changent. Par exemple, lorsque j'ai commencé à devenir mathématicien, une des choses qui m'a le plus frappé dans ce que j'avais trouvé - c'était au temps de ma thèse avec Jacques Dixmier - c'est qu'une algèbre non-commutative tourne avec le temps ! Ce que j'avais montré, c'est qu'en fait une algèbre non-commutative a une évolution dans le temps, qui lui est donnée de manière complètement canonique. Plus précisément, l'évolution qui était donnée par la théorie de Tomita, mais qui dépendait d'un état, ne dépendait en fait de cet état que modulo les automorphismes intérieurs, qui sont triviaux, qui n'existent pas. Donc ce que cela montrait, c'était que la non-commutativité engendrait le temps ! A partir de rien ! Simplement ! Comme ça ! Bien sûr il en résultait tout de suite qu'une algèbre a quantité d'invariants comme par exemple ses périodes, c'est-à-dire les temps t où l'évolution est triviale. Mais ces résultats, bien que parfaitement formulables et transmissibles n'épuisent pas le contenu poétique, la mise en mouvement merveilleuse de la trouvaille initiale.

Réalité mathématique

Il y a des poètes que j'admire beaucoup, comme Yves Bonnefoy, pour leur proximité au niveau méthodologique avec les mathématiques. Ce qui distingue, à mes yeux, le poète du mathématicien est que le matériau brut du poète, c'est l'expérience humaine dans la réalité matérielle. Et la poésie a pour ingrédient principal ce heurt entre l'être intérieur d'un individu et la réalité extérieure, qui tout le temps nous surprend par sa brutalité. Alors que le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons. Et la période qui est la partie vision ne suffit pas pour faire des mathématiques. C'est-à-dire qu'en contrepoint de cette partie vision, dans celle qui vient après la démonstration il y a les heures d'incertitude, de souffrance, qui consistent à avoir toujours peur de s'être trompé. C'est un peu la descente de la paroi qui consiste, cette fois, à être constamment obligé de regarder... On est obligé constamment de se dire : “Tiens, j'aurais pu me tromper ici, peut-être me suis-je trompé”. On n'en sait rien, on a toujours peur ! Il arrive qu'on passe des heures et des heures d'anxiété terrible, justement parce qu'on se heurte à une vraie réalité. Donc, ce n'est pas la réalité au sens ordinaire, mais elle est sans doute encore plus impitoyable.

La notion de vérité s'adresse alors à un monde qui est autre, qui n'est pas le monde de l'expérience humaine dans la réalité extérieure, mais qui est celui de la réalité mathématique. Le point crucial à comprendre est qu'alors que tant de mathématiciens ont passé leur vie à explorer ce monde, ils sont tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de son itinéraire, un jour ou l'autre si le parcours est assez long et si l'on se garde de se confiner dans une aire de spécialisation extrême, l'on atteindra l'une de ces cités bien connues comme les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zêta, etc. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connexe". Bien sûr cela ne signifie pas que toutes ses parties se ressemblent et Grothendieck dans *Récoltes et semailles* décrit ainsi son passage des paysages de l'analyse où il commença son parcours à ceux de la géométrie algébrique :

"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective, certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."

Alexandre Grothendieck

Galois

Ce que Galois a compris, d'une certaine manière, et c'est un peu le point de départ des mathématiques vraiment modernes, c'est qu'en fait, il faut être capable d'aller au-delà des calculs. C'est-à-dire ne pas faire les calculs, mais *en pensée* les faire ! Et comprendre quelle sera leur nature, comprendre quelles seront les difficultés qui vont se présenter, etc., mais sans vraiment effectuer concrètement les calculs, comprendre de quelle forme sera le résultat. Quelle symétrie aura le résultat. Et donc, dépasser cette espèce de gangue dans laquelle on s'engluerait facilement si l'on ne levait pas le nez du guidon. Il faut essayer d'en sortir par le haut, de réfléchir au niveau des symétries, etc.

"Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission."

Evariste Galois

Alors que ses prédécesseurs recherchaient des fonctions symétriques des racines d'une équation, Galois, lui, commence par briser la symétrie, pour y voir clair... Son point de départ est le choix arbitraire d'une fonction des racines qui n'admet *aucune* symétrie. La merveille est que le groupe d'invariance qu'il déduit du passage de cette fonction aux racines est en fait indépendant du choix arbitraire initial.

Loin d'être passées de mode, les idées de Galois irriguent encore les mathématiques contemporaines, simplement par leur simplicité et le mouvement qu'elles engendrent. La théorie des motifs due à Grothendieck est une généralisation naturelle de la théorie de Galois en dimension > 0 c'est-à-dire, si l'on veut, aux polynômes à plusieurs variables. Ces développements actuels, comme ceux de la théorie de Galois différentielle, se situent directement dans la dynamique des idées de Galois. Il convient de citer la fin de sa lettre testament.

"Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori *dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense."*

Evariste Galois

Algèbre et musique

Il est crucial, à mes yeux, pour un enfant, d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique, vers l'âge de cinq ou six ans, permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue, de cette richesse incroyable purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui donc, en fait, est reliée à la géométrie. La musique permet de l'équilibrer par l'algèbre, c'est-à-dire qu'elle s'inscrit dans le temps, exactement comme l'algèbre s'inscrit dans le temps. Dans les mathématiques il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la géométrie, qui correspond aux aires visuelles du cerveau, et qui donne une intuition instantanée, immédiate. On voit une figure géométrique, boum ! C'est ça, c'est tout, on n'a même pas besoin d'expliquer, on n'a pas envie d'expliquer. Et d'un autre côté, il y a l'algèbre. L'algèbre, cela n'a rien de visuel, en revanche, cela a une temporalité, ça s'inscrit dans le temps ! C'est le calcul, etc. C'est quelque chose qui évolue, et c'est quelque chose qui est très proche du langage et qui donc a la précision diabolique du langage. Et l'on peut percevoir cette puissance, l'élaboration de l'algèbre, à travers la musique. Donc, pour moi, il y a une connivence incroyable, justement, entre la musique perçue comme cela, et l'algèbre. Par exemple, j'adore certains préludes de Chopin parce que je trouve qu'ils ont exactement cette merveilleuse propriété de condensation, de distillation. C'est une musique qui arrive dans une pièce un petit peu comme si la fenêtre s'ouvrait brutalement par un coup de vent, et puis repart de l'autre côté. Condenser une idée sous sa forme la plus limpide, sous la forme la plus pure qui soit... L'algèbre, c'est ça, d'une certaine manière.

Conseils

Je terminerai ce texte sur quelques conseils "pratiques".

Faire un tour
Une pratique bien saine, quand on est aux prises avec un problème très compliqué (souvent impliquant des calculs), est de partir faire un long tour à pied (sans papier ni crayon) et de faire les calculs mentalement (en ignorant l'impression de départ "c'est trop compliqué pour ça"). Même si l'on n'y réussit pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les dents de l'intellect.

Divan
Les mathématicien(ne)s ont en général le plus grand mal à faire comprendre à leur conjoint que le moment où ils travaillent le plus intensément est lorsqu'ils sont couchés dans l'obscurité sur un lit. Malheureusement l'invasion des écrans d'ordinateur et du courrier électronique tend à rendre cette manière de se concentrer de moins en moins courante ; elle n'en est que plus précieuse.

Etre courageux
Il y a deux temps dans la découverte mathématique, il y a un temps dans lequel il faut être courageux : il faut monter le long de la paroi, et ne jamais regarder en bas... Pourquoi ? Parce que si vous commencez à regarder en bas, vous allez dire : "Oui ! Mais bien sûr, Untel a déjà regardé ce problème, il n'est pas arrivé à le résoudre, donc il n'y a aucune raison que j'y arrive."

Et vous allez trouver trente-six raisons rationnelles qui vont vous empêcher de monter. Donc il faut faire complètement abstraction de cela. Il faut en quelque sorte “protéger son ignorance” pour permettre l’éclosion d’une idée sans la dissoudre prématurément dans le bain des connaissances à l’instant t.

Stress
Il arrive souvent dans la vie d’un mathématicien (souvent dès le début) d’être confronté à des difficultés dues à l’âpreté de la compétition. Par exemple, on reçoit un “preprint” d’un compétiteur sur le même sujet que celui sur lequel on travaille et l’on sent une pression déraisonnable pour publier vite. La seule recette que je connaisse dans ces cas-là est d’essayer de transformer ce sentiment de frustration en énergie pour travailler plus dur.

De mauvaise grâce
Un de mes collègues me confiait il y a longtemps : “Nous (les mathématiciens) travaillons pour l’approbation à contrecœur de quelques amis.” Il est vrai que comme le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, le chercheur ressent le besoin d’approbation, d’une manière ou d’une autre. En vérité il ne faut pas attendre grand-chose, les mathématiciens sont avares de louanges. La vérité est qu’il n’y a qu’un seul véritable juge qui compte en la matière, c’est soi-même. Et il n’y a pas moyen de transiger avec celui-là. Trop se préoccuper de l’opinion des autres est simplement une perte de temps, aucun théorème n’a été jusqu’à présent démontré par référendum et comme le dit Feynman : “Why do you care what other people think !”