

Interview d'Alain Connes

Ceci est un article en avant-première, publié avant l'intégralité de son volume par Allyn Jackson.
Parution : 2021.

Alain Connes est né le 1er avril 1947 à Draguignan, dans le sud de la France. Après avoir assisté lycée de Marseille, il entre en 1966 à l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

Il passe son doctorat en 1973, sous la direction de Jacques Dixmier.

Au début de sa carrière, Connes a occupé des postes au CNRS (Centre National de la Recherche scientifique) et l'Université de Paris VI et a également été visiteur à l'Université Queen's à Ontario et l'Institute for Advanced Study de Princeton. Il a été nommé à la Léon Motchane Chaire à l'Institut des hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette en 1979, et, en parallèle, à la chaire d'analyse et de géométrie du Collège de France en 1984. En 2017, il prend sa retraite les deux postes. Il a également occupé des postes de professeur distingué à l'Université Vanderbilt et l'Université d'État de l'Ohio.

En plus de la médaille Fields en 1982, ses honneurs incluent le prix Ampère de l'Academy of Sciences (1980), le prix Crafoord (2001) et la médaille d'or du CNRS (2004).

Connes a fait des avancées majeures dans les algèbres d'opérateurs qui ont révolutionné le sujet et stimulé beaucoup de recherches supplémentaires. Cela l'a amené à développer, à partir de la fin des années 1970, une toute nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non commutative, qui s'est avérée avoir des liens profonds avec de nombreuses questions fondamentales en mathématiques et en physique. Grâce à ses dizaines de collaborateurs et plus de 250 publications, Connes a eu un impact majeur sur les mathématiques au cours des dernières décennies.

Ce qui suit est le texte édité d'une longue interview avec Connes, tenue en juillet 2020.

Première vie dans le sud de la France

Allyn Jackson : Vous êtes née à Draguignan, dans le sud de la France. Pouvez-vous me dire sur votre enfance qui y a grandi ?

Alain Connes : Laissez-moi vous raconter comment mes grands-parents sont arrivés là-bas. Mes grands-parents chez ma mère côté sont tous deux nés à Constantine, en Algérie. Ils sont arrivés en France en 1918, après que ma mère eut été née; elle est née à Tanger, au Maroc. Quand ils sont arrivés en France ils ont regardé dans une référence livre pour la ville la plus saine de France. Et ils ont trouvé Draguignan !

Mon grand-père était ingénieur, mais il a pris sa retraite assez tôt dans sa vie. Ils ont alors acheté un domaine à Draguignan. Mes parents se sont rencontrés à Draguignan en 1944, quand les Américains sont arrivés au sud de la France à la fin de la guerre, dans ce qu'on appelle le *débarquement* . Il y avait peut-être 1000 planeurs des avions, des gens qui sautent en parachute - venir à Draguignan !

Ma mère est décédée l'année dernière à 101 ans. Elle et mon père sont décédés tous les deux (il a également vécu jusqu'à 101 ans) dans la maison de Draguignan où je suis né. C'est navrant parce que maintenant nous vendons le maison, qui est l'endroit où tout mon subconscient est cartographié. Ce n'est pas seulement une maison, c'est un domaine avec un grand jardin, un petit bois, des vignes et de très grands vieux cèdres. Je suis attaché à cet endroit, à cause du calme. C'est un endroit où règne la sérénité.

Quand j'avais huit ans, mon père a décidé que l'éducation à Draguignan n'était pas assez bonne pour nous. Il a donc pris un travail très dangereux à Marseille, en tant que chef d'une escouade de police concentrée sur le trafic d'alcool. De temps en temps, il disparaissait pendant la nuit où il était arrêter les bandits.

Allyn Jackson : L'alcool était-il illégal à l'époque ?

Alain Connes : L'alcool n'était pas illégal, mais il était très taxé, donc il y avait beaucoup d'illégalité

trafic. Heureusement, il a quitté ce travail juste au début de l'arrivée de la mafia en 1966. Il n'avait pas à faire face à la mafia, mais c'était quand même assez dangereux. Il avait une voiture avec une course moteur et officiers à moto avec lui. Il n'a jamais été simple d'arrêter les gens, parce que... parce qu'ils ont dû les arrêter alors qu'ils faisaient du trafic. Nous étions tous stressés chaque fois qu'il le ferait disparaître comme ça pendant la nuit.

Allyn Jackson : Votre père était français, n'est-ce pas ?

Alain Connes : Oui. Ses parents étaient originaires du sud-ouest de la France.

Allyn Jackson : Quel travail faisait votre père quand vous habitiez Draguignan

Alain Connes : A cette époque, mon père était employé par l'administration fiscale dans un travail également lié à l'alcool, supervisant la production de vin dans le sud. Son propre père avait été tué au premier Guerre mondiale quand mon père avait un an, donc il n'a jamais connu son propre père. Il voulait donner nous une éducation comme un vrai père. C'était assez important. J'ai deux frères. Mon frère aîné a créé sa propre entreprise de logiciels, et il est assez riche. Mon jeune frère est médecin et spécialiste reconnu de la maladie de Crohn ; il est à la retraite maintenant.

Nous avons eu une éducation très dure. Par exemple, pendant les vacances, nous recevions du travail supplémentaire de mon père, et quand l'école était en session, il ajoutait au travail assigné par l'école – son contribution supplémentaire !

Allyn Jackson : Qu'avez-vous ressenti à ce sujet ?

Alain Connes : C'était terrible ! Nous trouverions tous les moyens possibles pour y échapper, bien sûr

Allyn Jackson : Pensez-vous que cela vous a finalement aidé ?

Alain Connes : C'est difficile à dire. Nous trois frères étions assez différents. Mon frère aîné se battrait avec mon père. Je ne me battais pas. J'étais plutôt cool, tranquille. Ce n'est pas clair à tout ça c'est une bonne recette, mais ça nous a beaucoup influencé. Par exemple, une fois que je suis rentré à la maison et que mon mon père m'a demandé quels étaient les résultats d'un concours de mathématiques auquel j'avais participé. J'ai répondu : « J'étais deuxième. » Puis il m'a claqué au visage, parce que je n'étais pas le premier.

Allyn Jackson : C'est une pression assez forte.

Alain Connes : Il y avait de la pression. Mais parce que nous étions trois frères et étions unis, nous trouverait tous les moyens de s'échapper. Par exemple, nous savions où mon père cachait les traductions des devoirs latins qu'il nous a confiés. Cela a rendu la vie beaucoup plus facile! Il nous demandait de réciter le deux fois les cours : le jour où on nous a donné les cours et une deuxième

fois la veille devaient les réciter à l'école. Nous les récitions à notre mère parce qu'alors il était possible de regarder le livre pendant que ma mère cuisinait ! Nous avons donc trouvé toutes sortes d'astuces pour nous échapper. Mais il était une éducation très dure. Il y avait vraiment une peur en chacun de nous, pendant toute notre enfance.

Une chose que je dois ajouter, c'est que j'aimais vraiment ma grand-mère maternelle. Elle a apporté le soo-chose, côté affectif, que ma mère a aussi apporté. Ma grand-mère était pianiste.

Allyn Jackson : Votre grand-mère était pianiste et votre grand-père ingénieur. Alors ils étaient aisés quand ils étaient en Algérie.

Alain Connes : Oui, ils étaient très aisés quand ils sont arrivés en France, mais ils ont tout perdu parce qu'ils ont acheté exactement le mauvais type d'obligations. Ils ont perdu toute leur fortune, tout.

Allyn Jackson : Mais ils avaient leur maison, le domaine à Draguignan...

Alain Connes : Oui, ils avaient leur maison, ce qui était très utile bien sûr.

Du lycée à l'école normale

Allyn Jackson : Quand tu as déménagé à Marseille quand tu avais huit ans, quel genre d'école est-ce que ton père t'a mis

Alain Connes : Nous avons été placés au Lycée St Charles, qui était tout près de chez nous. C'était un type d'école standard, mais bon, avec de bons professeurs. A cette époque, c'était complètement égalitaire. Si tu entrais à l'école, tu aurais une bonne éducation

Allyn Jackson : Étiez-vous intéressé par les mathématiques à l'époque ?

Alain Connes : Oui, mais la compétition ne m'intéressait pas. J'étais vraiment intéressé par le mien réflexion, et cela a duré jusqu'à ce que j'entre en classe préparatoire à l'école normale. À cette époque, j'avais déjà développé une théorie que j'aimais beaucoup. Si les problèmes que l'enseignant assignées étaient liées à ma propre pensée, alors je pouvais très bien faire. Mais s'ils n'étaient pas liés, alors ils ne m'ont pas fait appel.

J'ai eu un professeur quand j'étais à l'école préparatoire qui était très bon et qui s'intéressait à ce que je développais. C'était très agréable de sentir qu'il y avait quelqu'un qui se souciait de mon idée.

Allyn Jackson : Quelle était cette idée ?

Alain Connes : Plus tard quand je suis allé à l'Ecole Normale j'ai découvert que c'était déjà connu. L'idée était de remplacer la différenciation par des opérations aux différences finies. j'avais développé tout un système pour cela. Ce qui était vraiment important, c'était que c'était le mien. Ce n'était pas quelque chose que je avait ramassé dans les livres.

Quand je suis entré à l'Ecole Normale, j'étais beaucoup plus préoccupé par la recherche d'une petite amie que travail. C'est la vérité! Aussi, à cet âge-là, j'avais un très mauvais complexe sur mon

apparence physique. rance. Par exemple, je ne marchais que du côté droit de la rue parce que je détestais mon droit profil et je ne voulais pas que les gens le voient.

Allyn Jackson : Mais ton côté droit a l'air bien.

Alain Connes : Ça a l'air bien maintenant ! C'était étrange, ce complexe. Aussi, quand j'essayais de travailler, Je chantais et j'étais dérangé par mon propre chant. C'était particulier, mais c'est comme ça que j'étais !

Allyn Jackson : C'était une étape pour grandir.

Alain Connes : Exactement. Je n'étais pas tellement obsédé par les mathématiques. j'étais vraiment intéressé par mes propres actions, pas tellement en passant des examens ou des choses comme ça.

Allyn Jackson : Vos frères ont-ils aussi fait les classes préparatoires et sont allés à l'Ecole Normale ?

Alain Connes : Oui. Deux ans avant moi, mon frère aîné était entré à l'Ecole Normale. Donc il a ouvert la voie. Mon jeune frère a fait ses études de médecine, car il y avait une tradition dans la famille de ma mère de médecins. Elle était médecin, et son grand-père aussi.

Allyn Jackson : Avez-vous appris à jouer d'un instrument ?

Alain Connes : Quand j'avais cinq ans, j'ai commencé les cours de piano, et j'ai vraiment adoré. Mais quand nous avons déménagé à Marseille, nous ne pouvions pas avoir de piano dans la maison. Mon père m'a dit que je devais choisir entre musique et études. Alors j'ai laissé tomber le piano. J'ai bien sûr toujours regretté énormément de l'ont fait. A vingt ans, j'ai recommencé à jouer du piano, mais bien sûr j'avais raté les années les plus importantes pour l'apprentissage. J'ai fait beaucoup de travail pour m'en remettre, mais je n'ai jamais récupéré au point où j'aurais été. Mais bon, c'est la vie.

Allyn Jackson : Vous ne pouvez pas tout faire.

Alain Connes : On ne peut pas tout faire. Je vois maintenant très bien que j'ai une partie du cerveau qui est musical. En fait, je viens d'écrire un article pour le *Journal of Mathematics and Music* . Mais je sais que la partie du cerveau occupée par la musique est en quelque sorte en compétition avec la partie occupée par les mathématiques. Bien sûr, ils sont extrêmement proches. Cela peut sembler étrange, mais souvent j'apprends beaucoup en mathématiques en étudiant des partitions de musique.

Allyn Jackson : Comment ça se passe ?

Alain Connes : En mathématiques, on peut dans certains cas avoir l'impression d'avoir atteint le plus haut niveau de sophistication. Mais ensuite, vous étudiez une grande partition musicale, et vous trouvez que le compositeur a un niveau de sophistication qui est environ le double du niveau de sophistication du meilleures mathématiques. C'est ce que j'ai en tête. Il y a des compositeurs, surtout

du romantisme période, qui ont atteint un niveau de précision musicale que je trouve toujours réconfortant et source de énergie pour faire des mathématiques. J'utilise donc les partitions musicales comme source de sophistication, mais j'aime aussi improviser et laisser sortir les choses.

Allyn Jackson : Et le chant quand tu étais à l'Ecole Normale ?

Alain Connes : C'était du chant pauvre, des chansons corses ! C'était juste pour le plaisir. J'ai eu un temps heureux ment, surtout venant du sud de la France et me retrouvant à Paris, où les gens étaient beaucoup plus intellectuels.

Allyn Jackson : Était-ce un grand choc culturel d'aller à Paris ?

Alain Connes : Ah oui. Sans être désobligeant, il est vrai que le sud, en particulier Marseille, n'a pas du tout la formation intellectuelle qu'a Paris. J'ai été étonné quand j'ai été à Paris parce qu'il était très acceptable d'être totalement immergé dans des trucs intellectuels. A Marseille il fallait être bien habillé. Les gens étaient jugés sur leur apparence physique beaucoup plus qu'en Paris. A Paris, on pouvait voir dans les rues des gens qui n'étaient pas habillés correctement et ressemblaient à clochards. Ils s'en fichaient, ce n'était pas important. A Marseille, c'était important. je ne sais pas si c'est a changé maintenant, mais c'était comme ça à l'époque.

Allyn Jackson : Votre père était-il satisfait lorsque vous êtes entré à l'Ecole Normale ?

Alain Connes : Oh, bien sûr. Ma mère aurait préféré qu'on aille à l'Ecole Polytechnique parce que... car ils avaient un bel uniforme ! Sinon, mes parents étaient très satisfaits.

Liberté de penser et de grandir

Allyn Jackson : C'était en 1966 quand tu es allé à l'Ecole Normale. Comment c'était ?

Alain Connes : Nous avons eu une merveilleuse promotion de jeunes gars, et beaucoup sont devenus d'excellents mathématiciens. Cette année-là, à cette époque précise à l'Ecole Normale, nous n'avions aucune pression. Nous avons eu l'occasion d'arrêter de faire les travaux routiniers de l'école préparatoire et d'essayer de réfléchir. Je garder de beaux souvenirs de cette année. Un de mes amis me posait un problème, et puis pour tout le week-end, je ne pensais qu'à ce problème. C'était génial. Nous étions vraiment intéressé par les problèmes de mathématiques. C'était notre pain quotidien. Mais nous ne travaillions pas sur missions ; nous ne suivrions pas les cours. Nous avions quelques examens mineurs à passer à la fin de l'année, mais nous étions libres de penser aux mathématiques. Aujourd'hui, les élèves de l'Ecole Normale sont beaucoup plus traités comme des enfants. Ils doivent passer des examens et faire ceci et cela. Ils ne reçoivent pas cette bénédiction fondamentale, qui est le temps de réfléchir et développer par eux-mêmes. Tous les amis que je me suis fait alors se sont très bien comportés précisément parce que nous étions traités d'une manière qui nous a permis de grandir.

C'est le moment où j'ai appris que si par exemple vous avez un calcul très compliqué à faire, le meilleur moyen est de se mettre d'abord les choses dans la tête, puis de faire une promenade. Pas de papier, pas de crayon. Lorsque vous vous promenez, votre esprit apprendra à se construire une image mentale. Pour construire cette image mentale, pour le faire exister - c'est la partie la plus

difficile des mathématiques. Pour le faire, il faut se battre avec un problème pendant un certain temps - ne pas lire un livre, ne pas croire qu'un résultat est vrai parce que quelqu'un le dit. Non, cela n'a pas d'importance. Ce qui compte vraiment, c'est que tu te bats avec toi-même, seule. Puis progressivement l'image mentale existera dans votre esprit.

Allyn Jackson : Quelle est cette image mentale ? C'est une image géométrique ?

Alain Connes : Je ne sais pas comment cela se matérialise dans le cerveau, mais c'est quelque chose qui, quand vous y réfléchissez, s'illumine et vous envoie des signaux. Ce qui est encore plus frappant, c'est qu'il continuera à vous envoyer des signaux même lorsque vous n'y pensez pas. C'est exactement comme lorsque vous quittez votre à la maison et cinq minutes plus tard, vous dites: "Oh merde, j'ai oublié d'éteindre le poêle." Ces choses existent dans le cerveau, et ils vous envoient des signaux. De même en musique, vous pouvez avoir quelque chose qui existe dans votre esprit, un air ou un thème. C'est quelque chose d'étonnant et de très difficile à définir.

Allyn Jackson : Avec la musique, vous pouvez revoir un morceau dans votre esprit au fur et à mesure que le morceau avance dans le temps. Est-ce comme ça avec l'image mentale des mathématiques ?

Alain Connes : Cela dépend si c'est de l'algèbre ou de la géométrie. Si le problème est géométrique et il existe une solution, elle apparaîtra d'un seul coup, sans dépendance temporelle. Ce sera un coup. Mais pas en algèbre. L'algèbre est beaucoup plus dépendante du temps et évolutive. En algèbre, quand tu fais calculs, il existe une analogie certaine avec la dépendance temporelle en musique, qui est extrêmement frappant.

La non-commutativité génère du temps

Alain Connes : En fait, ça va beaucoup plus loin. L'une des choses auxquelles j'ai contribué en 1972

était le fait que, lorsque vous prenez une algèbre non commutative, vous avez une évolution temporelle canonique.

Deux mathématiciens japonais, [Minoru] Tomita et [Masamichi] Takesaki, avaient découvert que si vous avez un état sur un certain type d'algèbre, puis il y a une évolution dans le temps. Ce que j'ai découvert par faire des calculs extrêmement compliqués sur plusieurs mois, c'est que cette fois l'évolution est en fait indépendant de l'État, quand vous le regardez de la bonne manière, ce qui signifie que vous oubliez le tri-automorphismes des flacons. La preuve quand je l'ai écrit était incroyablement simple, mais elle est venue de faire beaucoup de calculs. Le fruit était extrêmement simple, mais la préparation était extrêmement compliquée.

Le dénouement me fascine encore aujourd'hui : la non-commutativité, qui a été découverte par les gens en mécanique quantique, en fait est un générateur de temps. Je pense encore au fait que le passage du temps, ou la façon dont nous sentons que le temps passe et que nous ne pouvons pas l'arrêter, est en fait exactement la conséquence de la non-commutativité de la mécanique quantique, ou plus explicitement de la caractère aléatoire de la mécanique quantique.

Quelque chose que Heisenberg a découvert, ce qui est absolument incroyable, c'est que lorsque vous répétez certaines expériences microscopiques, les résultats ne seront plus jamais les mêmes. Vous envoyez un photon à travers un très petite fente et regardez où il atterrit sur une cible. Si vous

répétez l'expérience, vous ne pourrez jamais pour prédire où le photon va atterrir. On peut utiliser ce fait pour concocter des nombres aléatoires, et, contrairement à la génération de nombres aléatoires par ordinateur, on pourrait créer un système de sécurité qui serait parfaitement sûr. Même si un attaquant connaissait tous les appareils que vous utilisez, il ne serait jamais capable de le reproduire. C'est le fait le plus frappant de la mécanique quantique. La question philosophique qui me fascine depuis toutes ces années, c'est que je crois que c'est justement ce type d'aléatoire qui est à l'origine du temps qui passe. J'ai écrit un livre avec ma femme et avec mon professeur, Jacques Dixmier, *Le Théâtre quantique* . 1 Le but du livre est d'expliquer cette idée, qui est beaucoup plus une question philosophique qu'une question mathématique.

Allyn Jackson : Pourquoi le caractère aléatoire de la mécanique quantique produit-il du temps ?

Alain Connes : La non-commutativité est à l'origine de cet aléa. Qu'est-ce que Heisenberg découvert est que si vous essayez très fort de connaître la position du photon, ainsi que sa momentum, vous ne pouvez pas le faire. Ceci est empêché par le fait que la position et l'élan ne commutent pas. Pourquoi cette non-commutativité génère-t-elle du temps ? Dans l'équation pertinente, même si deux choses ne commutent pas, vous pouvez toujours échanger leur ordre, donc vous remplacez AB par BA. Cela change le sens, tout comme « melon » n'est pas la même chose que « citron », même si les lettres sont identiques. Mais il y a un prix à payer pour intervertir la commande : Lorsque vous permutez A et B, et tu fais la passe A de l'autre côté, tu dois la faire évoluer avec le temps. Et le temps dans lequel il doit évoluer est en fait le nombre purement imaginaire i . C'est ce qui se passe dans les coulisses.

Heisenberg a fait sa découverte à une époque où il était atteint du rhume des foins au printemps. Il a été envoyé sur une île appelée Helgoland, qui se trouve dans la mer du Nord. Il y est resté quelques semaines, faire ses propres calculs. Une nuit, à 4 heures du matin je crois, il avait devant les yeux le scène entière. Et il a eu peur, car ce qu'il a vu était de la mécanique quantique, appelée plus tard matrice mécanique. Il avait découvert la non-commutativité des quantités physiques.

Dans le monde non commutatif, il y a quelque chose de totalement original qui n'existe pas dans le monde commutatif, où "melon" serait la même chose que "citron", et c'est ce que Dieu a donné évolution du temps. Cela rend les choses beaucoup plus intéressantes que si elles étaient statiques. Quand tu passes au commutatif, vous perdez beaucoup d'informations qui, si vous les gardez, vous permettraient de compresser le monde extérieur d'une manière beaucoup plus simple.

[Trouver son propre jardin](#)

Allyn Jackson : Je voudrais revenir sur vos débuts à l'Ecole Normale. Lorsque vous y est allé en 1966, l'IHES [Institut des Hautes Études Scientifiques, fondé en 1958] y allait fort. Alexander Grothendieck et son école étaient là. En faisiez-vous partie ?

Alain Connes : Non. A cette époque, la façon dont je percevais l'évolution autour de Grothendieck était : je n'ai qu'une seule façon d'être moi-même, qui est de rester aussi loin que possible de ce groupe. Mais je dois ajouter que maintenant j'ai lu le livre de Grothendieck *Récoltes et Semailles* , 2 et j'ai bien sûr lu plusieurs de ses papiers. J'en suis venu à aimer ces développements. Je suis aussi maintenant impliqué dans l'essai faire publier et faire revivre certains textes de Grothendieck.

Quand on commence à faire des mathématiques, il faut avoir son propre jardin, même s'il est éloigné de les choses très à la mode. Et vous devez commencer à exister là-bas. Ce n'est pas grave si c'est un petit jardin. Ce qui compte, c'est que c'est le vôtre. Ce qui compte, c'est que vous avez beaucoup réfléchi à ça et vous l'aimez, et vous le prenez comme point de départ. C'est ce que j'ai ressenti.

Allyn Jackson : A l'époque beaucoup de mathématiques étaient très dominées par Grothendieck et ses élèves.

Alain Connes : Non seulement ça, mais j'ai entendu des gens dire : « Pourquoi tu fais des mathématiques ? Tout sera fait par ces gens.

Allyn Jackson : Qu'il n'y avait pas de mathématiques en dehors de ce qu'ils faisaient à l'IHES ?

Alain Connes : Oui. Bien plus tard, Grothendieck comprit que c'était la mauvaise attitude. Le titre de son livre, *Récoltes et Semailles* [« moissonner et semer »], en quelque sorte peut être compris comme disant qu'il comprenait qu'en étant trop énergique, il avait eu un effet négatif. Heureusement la mathématique est un sujet tellement immense qu'il y a de la place pour tout le monde. Pourtant, sociologiquement, quand vous êtes débutant, c'est très difficile.

Allyn Jackson : Vous étiez à Paris lors des grands bouleversements de 1968.

Alain Connes : Oui. En 1968, mon frère aîné Bernard se battait sur les barricades. Sur mon côté, pas du tout. J'avais une histoire d'amour, alors je m'en fichais. Je ne me suis pas du tout impliqué. J'étais distant. Je n'étais pas impliqué politiquement. Je ne voulais pas l'être.

Allyn Jackson : A quoi pensiez-vous mathématiquement à ce moment-là ?

Alain Connes : Quand j'étais à l'Ecole Normale, j'ai développé quelque chose d'assez particulier zéros de polynômes dans le plan complexe. [Charles] Pisot, un théoricien des nombres, m'a demandé de parler dans son séminaire de ce que j'ai fait. C'était une approche assez originale, mais il s'agissait d'une approche marginale sujet. J'ai écrit une note des *Comptes-Rendus* à ce sujet. [3](#) Je participais aussi au séminaire de [Gustave] Choquet. Choquet était un homme très brillant, très spirituel mathématicien. Son séminaire a été très agréable. Il a décidé que je devais apprendre la physique, alors il m'a envoyé à une école d'été de physique aux Houches en 1970. J'y étais avec ma future épouse. C'était la première fois que j'ai appris les algèbres d'opérateurs. C'était génial. J'ai rencontré beaucoup de monde. Puis le un an plus tard, certaines personnes que j'avais rencontrées m'ont invité à une réunion à Seattle.

Une histoire de sérendipité

Alain Connes : C'est ainsi que j'ai commencé à travailler sur la théorie Tomita-Takesaki. C'est une histoire de heureux hasard. Avant d'aller à Seattle, je me suis marié avec ma femme en 1971. Aucun de nous n'avait voyagé aux États-Unis avant. J'ai décidé d'accepter l'invitation juste parce que je voulais visiter les États-Unis ! je n'ai pas regardé tout le sujet de la conférence. Nous avons pris l'avion pour New York pour rendre visite à mon frère, qui était en Princeton à l'époque. C'était en juillet, et il faisait si chaud que le seul endroit qui était en quelque sorte acceptable était la librairie. Nous avons passé beaucoup de temps à la librairie. nous allions voyager en train de Montréal à Vancouver puis à Seattle. Nous avons eu quelque chose comme cinq jours dans le train, avec les Grandes Plaines à traverser - plutôt ennuyeux. Alors j'ai dit, pourquoi n'achèterais-je pas un livre de maths à lire pendant le voyage ? J'ai hésité entre plusieurs livres qui avaient l'air assez intéressants. Finalement j'ai acheté un petit livre de notes de cours. [4](#)

Quand nous étions dans le train, j'ai ouvert le livre et il avait l'air fascinant. Enfin nous arrivons à Seattle, je vais à la conférence et je regarde le programme. Oh myGod - l'auteur du livre, Takesaki, est l'un des conférenciers ! C'est un signe ! J'ai décidé de n'assister à aucune conférence à part ses conférences et d'étudier ce genre de choses.

Nous étions à Seattle pendant quelques semaines et nous avons passé un merveilleux moment. Quand nous sommes revenus, j'ai cherché qui en France faisait ce genre de maths et découvrit que c'était Jacques Dixmier. J'ai décidé qu'en Septembre je devrais aller au séminaire de Dixmier.

Il a ouvert le séminaire en apportant plusieurs papiers et en demandant qui voulait parler de quel papier. J'ai levé la main et pris un papier, [5](#) juste au hasard. C'était sur un tout autre sujet de la théorie Tomita-Takesaki. Je suis rentré chez moi en train, et dans le train j'ai trouvé que ce que les auteurs, [Huzihiro] Araki et [Edward James] Woods, faisaient était en fait profondément lié à la théorie Tomita-Takesaki.

Le même jour, j'écrivis une lettre à Dixmier, et peu après j'eus rendez-vous avec lui. La seule chose qu'il m'a dite c'est : « *Foncez !* " "Allez, allez, allez - allez vite." J'ai écrit tout de suite une note aux *Compte-Rendus* [6](#) pour expliquer que les invariants d'Araki et de Woods pourraient être calculés en utilisant la Théorie de Tomita-Takesaki. C'était le début de mon travail.

Allyn Jackson : Dixmier a bien compris que tu étais sur quelque chose

Alain Connes : Il a tout compris. Et bien sûr, il est mon ami depuis lors.

Allyn Jackson : Mais tout cela est assez aléatoire, n'est-ce pas, que vous ayez acheté ce livre à Princeton et trouvé Takesaki à Seattle ?

Alain Connes : Oui, c'était totalement aléatoire. Certaines personnes disaient des choses qui n'étaient pas si gentilles ; elles ou ils dit que j'ai eu de la chance. Mais la sérendipité n'est pas chanceuse. C'est transformer ce qu'on vous donne en chance. Comme vous le dites, il y a un certain élément d'aléatoire, et puis il faut faire énormément de travail. Mais quelque part, c'est un travail qui est guidé par l'idée qu'il y a quelque chose là-bas. En mathématiques cela compte plus que toute autre chose, le sentiment instinctif qu'il y a quelque chose. Ce n'est pas à le niveau de pensée rationnelle ; c'est au niveau de l'intuition. C'est quelque chose qui est difficile à transmettre à quelqu'un d'autre mais qui vous habite et vous permet d'avancer. Et Dixmier s'en aperçut complètement.

Allyn Jackson : Il a 96 ans maintenant.

Alain Connes : Oui, et récemment nous avons écrit, avec ma collaboratrice [Caterina] Consani, un très papier technique. C'est le seul que je connaisse qui a vraiment compris ce qu'on fait là ! Il est un homme incroyable. A 96 ans, il avait des commentaires parfaits.

Des facteurs aux feuilletages

Allyn Jackson : En 1973, vous avez terminé votre thèse, sous la direction de Dixmier. Pouvez-vous me dire conceptuellement ce que tu as fait dans ta thèse ?

Alain Connes : J'ai fait deux choses fondamentales. La première était de montrer que cette évolution temporelle était en fait indépendant de l'état, ce qui donne de nombreux invariants des algèbres de von Neumann, de facteurs. Les facteurs ont été introduits par von Neumann pour explorer les factorisations non triviales du Hilbert l'espace en mécanique quantique. La seconde était la chose principale, qui était de réduire le type III facteurs, qui étaient ceux que von Neumann avait complètement omis, au Type II et aux automorphismes.

Allyn Jackson : Au moment où vous avez commencé à travailler là-dessus, les facteurs de type III n'étaient pas bien entendu ?

Alain Connes : Ils n'ont pas du tout été compris. Ce que j'ai prouvé dans ma thèse, c'est que, d'abord

tous, ils sont classés dans le Type III λ , où λ est compris entre 0 et 1. Ensuite j'ai donné un réduction, à l'exception du Type III 1 au Type II et des automorphismes. Beaucoup plus tard, Takesaki a fait le cas du type III₁.

Après avoir fait ce travail en juin 1972, je suis parti en vacances avec ma femme. Je ne m'inquiétais pas du tout priorité. Dixmier a dû m'appeler pendant les vacances et me dire que je devais publier quelque chose, car sinon il serait perdu. J'étais un peu naïf.

Allyn Jackson : Quelqu'un d'autre travaillait sur la même chose ?

Alain Connes : Bien sûr. Il y avait un groupe de personnes à Kingston, en Ontario, qui travaillait plus tard sur le même chose. Mais j'ai été le premier à découvrir les résultats les plus importants. [7](#) Ce problème de priorité se reproduirait plusieurs fois dans ma carrière. Mais nous ne travaillons pas pour avoir notre nom sur quelque chose.

Nous travaillons pour le plaisir de la découverte. Et ce plaisir est quelque chose que personne ne peut emporter de notre part. Je me souviens avoir fait la découverte lors d'une visite à Erling Størmer en Norvège, pendant ces longues journées de juin où le soleil ne se couche pas. J'ai de merveilleux souvenirs de cette époque.

Aussi dans ma thèse, j'ai trouvé qu'il y a des facteurs qui sont hyperfinis mais ne sont pas des pro-tenseurs infinis conduits. C'est un résultat que j'ai annoncé en juillet de la même année 1972, et qui a utilisé tout le pouvoir de ma théorie. Ce n'était pas seulement un résultat abstrait. Il a eu de nombreuses conséquences surprenantes pour personnes à l'époque.

En 1976, j'ai été admis à l'IHES en tant que visiteur. J'étais un spécialiste bien connu dans ma région, mais la région n'était pas aussi connue que celle de l'IHES. Alors à ce moment-là, je me sentais comme un étranger. J'ai senti que ce que je faisais était très bien, mais les gens ne le savaient pas.

Puis j'ai rencontré une personne fantastique, Dennis Sullivan, qui était à l'IHES à l'époque. Il a cet incroyable Pouvoir socratique. Il s'asseyait avec un nouveau venu et lui demandait : Que faites-vous en mathématiques ? Le nouveau venu penserait, ce type est un idiot, il pose des questions si simples. Tu penses que tu sais tout et il ne sait rien. Mais au bout d'un moment tu te rends compte, mon Dieu, c'est quelque chose que je n'ai pas compris dans mon propre travail !

Avec Sullivan m'expliquant beaucoup de choses, j'ai découvert que, alors que le sujet sur lequel je travaillais n'était pas familier à tant de gens, il y avait un moyen de fabriquer des facteurs dans une géométrie bien connue contexte, le contexte des feuilletages. J'ai donc pris contact avec la géométrie différentielle. j'ai découvert que leurs objets familiers, les feuilletages, donnent immédiatement naissance à des facteurs, et les facteurs les plus exotiques étaient apparaissant à partir des feuilletages les plus naturels.

Un exemple est la foliation d'Anosov, une foliation bien étudiée qui provient de l'écoulement géodésique sur une surface de Riemann. Il s'avère que la foliation d'Anosov donne lieu exactement au type hyperfini facteur III, qui est un facteur très difficile et exotique dans la classification.

Cela s'est produit entre 1976 et 1978, lorsque Sullivan et moi discussions beaucoup ensemble.

Allyn Jackson : C'était aussi à l'époque où Vaughan Jones est devenu l'élève de [André Haefliger à Genève. Haefliger était une figure majeure des feuilletages à cette époque. Avez-vous eu des contacts avec Haefliger en raison du lien de votre travail avec les feuilletages ?

Alain Connes : Non, de façon marginale. La façon de penser de Sullivan était beaucoup plus proche de la mienne. Je n'aime pas lire les journaux, et Sullivan non plus. Il a une façon de communiquer qui est orale mais aussi gestuelle. Cela me convenait parfaitement. Il m'expliquait les notions que, si j'essayais pour les apprendre dans les livres, cela aurait pris une éternité, et je ne l'aurais pas eu. Mais il aurait fait juste quelques gestes et explique quelque chose, et j'ai compris. On y voit l'énorme influence d'institutions comme l'IHES. Donner des conférences n'est pas la même chose.

Il faut vivre avec ces gens, il faut être là, il faut avoir du temps libre, du temps pour déjeuner, l'heure du thé. Et le progrès se produit par accident. Vous ne pourriez jamais le planifier.

Allyn Jackson : Pour en revenir à Vaughan Jones - il était essentiellement votre doctorant, même bien qu'il fût étudiant à Genève et que Haefliger était officiellement son conseiller.

Alain Connes : C'est vrai. Vaughan est un très bon ami. Il a repris quelque chose que j'avais fait quand j'étais à Kingston en 1975, sur les automorphismes de facteurs finis, puis il a développé une belle théorie générale des sous-facteurs. Dans les années 1980, il fit une magnifique découverte, la découverte du lien avec la théorie des nœuds. C'était fantastique.

C'est une histoire étrange en un sens, car après que Vaughan ait découvert son nouvel invariant de nœud, qui est venu à partir de facteurs, il a été refondu d'une manière différente par [Edward] Witten, sous l'influence de [Michael] Atiyah aussi. J'ai dû mettre le pied dans la porte pour que

Vaughan Jones obtienne les Fields Médaille. Sa découverte était habillée en termes d'intégrales fonctionnelles et de choses de ce type, tandis que la véritable contribution, la véritable force de la découverte, provenait de son propre travail sur les sous-facteurs. Je étais un un peu rebuté par cela.

Allyn Jackson : Comment voulez-vous dire que vous avez mis le pied dans la porte à propos de sa médaille Fields ?

Alain Connes : Ce que je dis, c'est que la tendance de l'époque était de mettre davantage l'accent sur

l'aspect intégral fonctionnel de la théorie des nœuds, que sur la véritable origine de l'invariant, qui venait des facteurs. Bien sûr, quand vous écrivez des choses plus géométriques, c'est facile à comprendre. D'un autre côté, il est absolument étonnant que la théorie des facteurs, qui semble plutôt exotique, s'avère être lié à la théorie des nœuds, qui est très concrète, très basique. Et Vaughan a découvert un véritable invariant dans la théorie des nœuds. C'est une découverte étonnante. Je ne sais pas de nombreuses découvertes qui peuvent rivaliser avec elle. Pour cela, il faut une ouverture d'esprit. Il était dans Suisse avec des gens qui étaient géomètres, mais je ne sais pas le rôle que cela a pu jouer dans sa découverte. Il faudrait lui demander.

Idées complémentaires

Allyn Jackson : Vous avez parlé de l'importance d'avoir vos propres idées, « votre propre jardin » comme tu le dis. Mais ce qui est étonnant en mathématiques, c'est que vous allez n'importe où dans le monde, et d'autres les mathématiciens ont les mêmes idées, et vous pouvez leur en parler.

Alain Connes : Eh bien, les idées ne sont pas exactement les mêmes. Oui, nous pouvons communiquer, mais qu'est-ce que vraiment intéressant est de rencontrer des mathématiciens avec des idées complémentaires.

En 1978, j'ai passé un an à l'IAS [Institute for Advanced Study] à Princeton, et j'ai rencontré la personne qui allait devenir mon plus grand collaborateur, le théoricien de la représentation Henri Moscovici. Le séjour à Princeton était important pour moi parce que je l'y ai rencontré. Sinon, j'avais l'impression que l'IAS était un endroit étrange. Il y avait une immense cafétéria, où les gens s'asseyaient à différentes tables. je n'ai pas trouvé c'est très sympathique, sauf pour rencontrer mon collaborateur Henri.

Allyn Jackson : Vraiment ? De nombreux mathématiciens parlent de la bonne ambiance dans la salle à manger de l'IAS salle et comment ils aiment s'asseoir à la table des mathématiques.

Alain Connes : D'une certaine manière, il y avait un énorme contraste avec l'IHES. A l'IHES la cafétéria est petite, et les gens sont obligés d'être ensemble, alors qu'à Princeton, on pouvait facilement s'asseoir seul à une table et Etre ignoré.

Heureusement, j'ai rencontré Henri Moscovici à cette époque, et nous avons beaucoup travaillé ensemble pendant de nombreuses années.

Sinon, j'aurais été assez isolé, je pense. Il avait beaucoup d'idées qui me manquaient et savais des choses que je ne savais pas. Cela s'est également produit en 1980 lorsque j'ai rencontré Paul Baum. C'était une rencontre ter avec quelqu'un qui n'avait pas la même façon de penser que moi. C'était

complémentaire. Je rencontré Paul Baum lors d'une conférence à Kingston, à l'époque où j'avais découvert la non-commutation géométrie. Avant d'aller à Kingston, j'ai écrit une note de *Comptes-Rendus* [9](#) sur une idée qui m'est venue à partir de feuilletages. Le fait était que les feuilletages n'ont pas seulement une théorie de la mesure, ce que j'ai trouvé donne à des facteurs exotiques, mais ils ont aussi une géométrie différentielle. J'ai réalisé ce différentiel la géométrie pourrait être mise en œuvre dans le cadre non commutatif. Dans la note des *Comptes-Rendus* Je viens de mentionner, j'avais fait la géométrie différentielle non commutative complète pour les tores non commutatifs. Puis j'ai rencontré Paul Baum, et il avait exactement ce qui me manquait. J'avais construit, en utilisant des géométries transversales, modules sur les algèbres de feuilletages, ce qui signifiait que j'avais construit des éléments de la K-théorie. Mais je ne savais pas comment les construire en général. Baum a eu exactement l'idée, dans un sujet complètement différent, qui conduirait à la construction d'éléments généraux de la K-théorie. Nous rencontré, et pouf, il y a eu une étincelle.

Allyn Jackson : Quel était l'autre sujet qu'il examinait ?

Alain Connes : Il travaillait sur une réalisation géométrique de ce qu'on appelle la K-homologie cycles. La K-homologie a été développée d'abord dans le langage spatial de Hilbert par Atiyah, puis par [Aleksandr] Mischenko, [Gennadi] Kasparov, et bien d'autres. Le but de Paul Baum était de faire géométrique. Il avait défini un objet géométrique qu'il n'utilisait que pour les variétés riemanniennes.

Ce que j'ai vu immédiatement, c'est que cela fonctionnait également pour les feuilletages.

Géométrie et physique non commutative

Allyn Jackson : Quelle est l'idée principale de la géométrie non commutative ?

Alain Connes : Il y a des espaces, comme l'espace des feuilles de foliations ou l'espace de Penrose carrelages, qui, lorsque vous essayez de les voir comme des espaces ordinaires, sont insolubles. Ils deviennent tratable à condition de généraliser l'idée de Descartes d'utiliser des coordonnées, à des situations où les coordonnées ne font plus la navette. Une fois que vous acceptez l'utilisation d'algèbres non commutatives comme algèbres de coordonnées, alors vous découvrez que vous pouvez traiter des espaces qui, avec les outils ordinaires, seraient totalement intraitable.

A la fin des années 1970 et dans les années 1980, j'ai commencé à développer la géométrie - géométrie complète, y compris la géométrie différentielle et la théorie de Rham, qui a donné la cohomologie cyclique - de sorte que tous les outils qui nous avons normalement serait disponible dans cette configuration généralisée et non commutative. La beauté ici vient du fait que vous ne faites pas que généraliser quelque chose ; ces nouveaux espaces ont totalement nouvelles fonctionnalités. L'un d'eux est cette évolution du temps donnée par Dieu. Les espaces ordinaires sont statiques, tandis que ces nouveaux espaces ont la grande propriété d'être dynamiques et d'évoluer dans le temps.

Lorsque vous découvrez quelque chose de vraiment original, vous pouvez être sûr que les gens seront contre vous et va essayer de le rejeter. C'est un fait de la vie. Si vous faites quelque chose de manière ordinaire, tout le monde être heureux et peut le comprendre. Mais dès que tu fais quelque chose que les gens ne peuvent pas comprendre parce qu'ils ne sont pas dans le bon cadre, alors vous pouvez être sûr qu'il y aura beaucoup d'opposition.

Allyn Jackson : Qu'est-ce qui se cache derrière l'opposition ? Est-ce juste une barrière technique ?

Alain Connes : Non, ce n'est pas une barrière technique. Les mathématiques sont évoluées et compliquées telles qu'elles sont.

Vous ne voulez pas introduire quelque chose de nouveau. C'est la réaction des gens.

Il est bien sûr normal d'être confronté au scepticisme. Par exemple, avec Henri Moscovici nous avons vu la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques en utilisant notre travail. [10](#) Il s'agissait d'un problème connu indépendamment de la nouvelle technique. La nouvelle technique doit faire ses preuves sur des problèmes qui ont été posés avant. Sinon, les gens ne l'accepteront pas et diront : « Nous le savions avant », ou "Pourquoi ça t'intéresse ?"

Au milieu des années 80, j'ai découvert quelque chose que j'ai trouvé très surprenant. Lorsque vous avez ces nouveaux espaces disponibles, alors vous pouvez repenser l'espace-temps ordinaire. Ce que j'ai trouvé, c'est que l'espace-temps a une structure fine, qui n'est pas le continu ordinaire et qui est juste un peu plus compliquée ; il est non commutatif. Lorsque vous prenez en compte cette structure fine, vous constatez que la gravité pure vous donnera le modèle standard couplé à la gravité. À l'époque, j'ai écrit un seul article sur cette. [11](#) L'idée s'est concrétisée dans les années 1990, dans mon travail avec Ali Chamseddine.

Ce qui est mystérieux et étrange dans le modèle standard, c'est ce qu'on appelle le secteur de Higgs, cependant c'est en fait dû à trois personnes, [Robert] Brout, [François] Englert et [Peter] Higgs. Ce secteur s'appelait les « toilettes » du modèle standard : c'est quelque chose dont vous avez vraiment besoin dans votre maison mais vous ne le montreriez pas à vos invités. Ce secteur est très étrange. Il donne des masses à toutes les particules, mais c'est dû à un champ scalaire, donc c'est un champ de spin zéro. Cela vient de nulle part.

Maintenant, du point de vue de la géométrie non commutative, l'image mentale est incroyablement nette. Si vous pensez à l'espace-temps comme à une feuille de papier, il est recto-verso. Lorsque vous différenciez une fonction sur cet espace, vous pouvez le différencier sur sa restriction au côté supérieur de la feuille, ou vous pouvez le différencier sur sa restriction à la face inférieure. Mais vous pouvez aussi le différencier en prenant la différence finie entre les deux côtés - les différences des valeurs de la fonction des deux côtés du papier. Cela vous donne un champ de spin zéro, le champ de Higgs. Cela vous indique que, à condition que vous affiner la géométrie de l'espace-temps, vous comprendrez pourquoi le modèle standard semble si compliqué. ted, même s'il ne s'agit que de pure gravité.

Allyn Jackson : Donc vous avez le morceau de papier avec les deux côtés - où est le non-commutatif aspect ?

Alain Connes : L'aspect non commutatif vient du fait que quand on regarde ça différence finie, il s'agit de la géométrie différentielle non commutative. Il y a aussi une petite quantité de non-commutativité dans l'algèbre des fonctions, et c'est cette quantité de non-commutativité qui génère en fait les champs de jauge de la force forte et de la force électrofaible. Le développement de ces idées ont culminé en 2014, dans un article [12](#) avec Chamseddine et [Viatcheslav] Mukhanov, où l'on a bien compris la non-commutativité qu'il fallait inclure pour obtenir l'histoire complète.

Le point de départ de cela était dans les années 1980, lorsque le développement de la géométrie non commutative occupait beaucoup de mon temps. J'avais des exemples très explicites, comme l'espace-temps, qui motivaient la théorie générale, et bien sûr feuilletages. Un autre exemple est le

carrelage Penrose. À la fin des années 80, je suis allé à une conférence tenue dans un château près de Munich, Schloss Ringberg. [Roger] Penrose a donné un parler des carrelages Penrose. Ce sont des pavages du plan qui ne sont pas périodiques. Ils ont été découverts par les logiciens. Les pavages initiaux utilisaient de nombreux carreaux différents, mais Penrose les a simplifiés à seulement deux tuiles, ce qui est assez remarquable. Vous pouvez carrelage l'avion de différentes manières avec ces deux tuiles. Penrose a montré une propriété étonnante de ces pavages. Si vous avez deux carrelages qui ne sont pas identiques, alors vous pouvez prendre une portion de l'un des pavages, et vous pouvez trouver cette portion infiniment fois dans l'autre carrelage. Il a mis en place deux transparents montrant cela, et il a dit : « Il y a quelque chose de quantique derrière cela. Quand je suis revenu de la conférence, j'ai tout de suite compris que l'espace des pavages de Penrose était un espace non commutatif.

Allyn Jackson : Qu'est-ce que ça veut dire, qu'« il y a quelque chose de quantique » dans cet espace ?

Alain Connes : Cela veut dire que l'algèbre des fonctions sera non commutative, donc être une histoire spatiale de Hilbert. Mais voici ce que cela signifie au niveau de Cantor et de la théorie des ensembles. Si tu vois la collection de pavages Penrose comme un ensemble, il a la cardinalité du continuum. Mais la revendication que je fais - et c'est une propriété caractéristique des espaces non commutatifs - c'est que vous ne pouvez pas le mettre effectivement en bijection avec les nombres réels. En fait, vous ne pouvez pas l'injecter efficacement dans les nombres réels. Si j'ai deux nombres réels différents et que je regarde leurs expansions décimales, ils sont différents à un moment donné. Mais ce n'est pas le cas pour les carrelages Penrose, car si je les regarde localement, je ne peux pas distinguer entre deux d'entre eux.

Quand j'ai écrit mon livre *Noncommutative Geometry* [13](#) en 1994, j'ai mis des pavages de Penrose au début, car c'est un exemple très frappant. Penrose avait la bonne intuition. L'espace a une topologie, une topologie non commutative. Et le nombre d'or sort par miracle de l'algèbre.

Allyn Jackson : Comment ça se passe ?

Alain Connes : Quand on a une algèbre non commutative, on a sa K-théorie, qui était inventé par Grothendieck et adapté par Atiyah au cadre topologique et qui a du sens dans le cas non commutatif. Vous pouvez calculer la K-théorie et également la mapper sur les nombres réels par la trace, s'il y a une trace sur l'algèbre. Pour le cas des pavages Penrose, lorsque vous associez sa théorie K aux nombres réels, vous obtenez le nombre d'or, juste par miracle.

Dans le nouveau monde non commutatif, il y a des choses faciles à adapter, comme la K-théorie, qui a été presque construit pour des situations non commutatives. Ensuite, il y a des choses qui étaient beaucoup plus difficiles à m'adapter au monde non commutatif, et c'est ce que j'ai fait avec la cohomologie cyclique au début des années 1980.

[Connexion à l'hypothèse de Riemann](#)

Allyn Jackson : Votre travail a établi des liens avec l'hypothèse de Riemann. Comment est-ce venu à propos de...

Alain Connes : Dans les années 90 j'ai collaboré avec Jean-Benoît Bost sur un système de statistiques quantiques. mécanique qui avait une propriété très frappante appelée brisure spontanée de la symétrie. Cela peut s'expliquer assez simplement. Imaginez que vous êtes assis à une table ronde avec plusieurs personnes. Sur chaque côté de chaque personne il y a une assiette à pain. Dès que l'une des personnes décide de prendre l'assiette sur la gauche, il est clair que tous les autres devront prendre celui de gauche. Mais cette première personne pourrait ont choisi la plaque sur la droite, et alors tout le monde devrait faire la même chose. C'est appelé brisure spontanée de symétrie.

Avec Jean-Benoît Bost, nous avons trouvé un système à brisure spontanée de symétrie. [14](#) Sa partition fonction était la fonction zêta de Riemann, ce qui était bizarre. Il est sorti de nulle part. À cause de cet article avec Bost, j'ai été invité en 1996 à une conférence à Seattle en l'honneur d'Atle Selberg, qui avait fait beaucoup de découvertes sur la fonction zêta de Riemann. Je suis allé à la conférence, et là était une foule de personnes assez intéressante, dont Paul Cohen par exemple et plusieurs physiciens.

J'ai donné une conférence sur le travail avec Bost. Ensuite, Selberg est venu me voir et m'a dit : « Vous savez, c'est pas clair que votre travail sera vraiment lié aux zéros de la fonction zêta de Riemann. »

Allyn Jackson : Pourquoi Selberg a-t-il pensé cela ?

Alain Connes : Dans mon intervention, la fonction apparaissait juste comme fonction ; les zéros n'avaient pas un sens à mon discours. Alors bien sûr pour lui, ce n'était pas clair du tout qu'il y aurait une relation.

Je suis revenu de Seattle, et au lieu d'essayer de m'adapter à l'heure locale - comme vous le savez, il y a neuf heures de décalage horaire - j'ai continué à vivre à l'heure de Seattle, plus ou moins. J'ai pu le faire grâce au compréhension de ma femme! Je ne travaillais pas. Je lisais *The Right Stuff*, qui raconte la histoire d'Apollo 13. Au bout d'une semaine, j'ai soudain réalisé qu'il y avait un espace qui ressortait extrêmement naturellement du système que nous avions avec Jean-Benoît Bost, qui était un espace non commutatif et d'où les zéros de zêta apparaissaient tout à fait naturellement. Les termes de la Riemann-Weil la formule explicite est également venue tout naturellement.

Un problème très souligné par certains physiciens de Seattle est que, lorsque vous essayez de réaliser les zéros de zêta en tant que spectre - ce que tout le monde essayait de faire - c'est problématique en raison d'une persistance signe moins dans certains termes. Ce signe moins empêche l'expression naïve des zéros comme un spectre. Quand j'ai découvert que les termes de la formule explicite de Riemann-Weil apparaissaient naturellement,

J'ai compris qu'il ne fallait pas chercher un spectre d'émission mais un spectre d'absorption. Laisser m'explique la différence entre les deux, car elle est cruciale dans mon travail.

Lorsque vous faites passer la lumière du soleil à travers un prisme, la lumière se décompose en différentes longueurs d'onde, ou fréquences, et cela vous donne une belle image d'un arc-en-ciel. Après Newton, un opticien allemand nommé [Joseph von] Fraunhofer, qui a vécu au début du 19ème siècle, a étudié cela. Il décomposé la lumière du soleil à travers un prisme, puis l'a regardé presque au niveau d'un microscope.

Ce qu'il a trouvé, c'est que, dans le bel arc-en-ciel, il y a des lignes sombres. En fait, une ligne sombre avait été découverte avant Fraunhofer, la lignée du sodium. Mais il a découvert qu'il y a en fait plus de 500 lignes sombres. On les appelle raies d'absorption.

Lorsque la lumière traverse l'atmosphère du soleil, les produits chimiques dans l'atmosphère font des transitions.

en absorbant des photons à certaines longueurs d'onde. Les longueurs d'onde correspondantes de la lumière ne atteignent la terre, et ainsi vous avez les raies d'absorption sombres. Vers 1860, [Gustav] Kirchhoff et [Robert] Bunsen a découvert que les raies sombres des spectres d'absorption coïncident avec les raies lumineuses de spectres d'émission, qui apparaissent lorsque les éléments sont chauffés.

En mathématiques, il est très facile de décrire un spectre d'émission et beaucoup plus difficile de décrire un spectre d'absorption. Mon idée était que le spectre donnant les zéros de la fonction zêta de Riemann était un spectre d'absorption, ce qui expliquait le signe moins : l'absorption est comme prendre le négatif d'une image, et c'est ce négatif qui vous donne le signe moins. J'ai donc fait un calcul à cette époque, en 1996, et cela m'a donné le bon spectre. J'étais très excité et j'ai écrit un *compte-Rendus* note [15](#) expliquant cela.

À cette époque, j'avais l'espoir que cela donnerait un aperçu des zéros de zêta. Mais c'était un spectre d'absorption, il est donc beaucoup plus difficile à manipuler qu'un spectre d'émission. Ça a commencé une longue histoire, qui s'est poursuivie jusqu'à présent, dans le travail avec ma collaboratrice Caterina Consani. Les idées restent très puissantes. Dans un article [16](#) très récent que nous avons mis sur l'arXiv, ces idées ont permis nous pour faire plus de progrès. Le résultat est que l'espace des nombres premiers pourrait être vu sortir d'un espace non commutatif qui était extrêmement naturel.

Allyn Jackson : Pourquoi les raies d'absorption sont-elles tellement plus difficiles à gérer que les émission-lignes de séparation ?

Alain Connes : Quand on a une raie d'absorption, c'est une seule raie, donc normalement ce ne serait pas être vu. À moins que la ligne n'ait une certaine épaisseur, une certaine largeur, vous ne la verriez pas. Mathématiquement parlant, les zéros de zêta n'ont pas d'épaisseur. Vous devez les faire artificiellement un peu épais pour pouvoir les voir. Et c'est très dur. C'est précisément ce point technique qui est maintenant bien mieux traité, mais cela a pris énormément de temps à comprendre.

C'est un développement sur lequel j'ai travaillé, parallèlement au développement physique du Modèle standard, depuis les années 1990. Ces deux développements sont pour moi cruciaux. Si non commutatif la géométrie ne traitait que d'espaces très étranges, je ne pense pas qu'il serait très convaincant de gens. Mais pour deux espaces fondamentaux - pour l'espace-temps, l'espace où nous vivons, et pour l'espace des nombres premiers - il peut apporter quelque chose de nouveau et incarner l'intuition derrière eux.

Comprendre la renormalisation

Alain Connes : Une autre évolution a également joué un rôle clé. Depuis les années 1970, je suis fasciné par une technique physique appelée renormalisation.

Dans les années 1930, lorsque Dirac a créé la théorie quantique des champs, il a quantifié le champ électromagnétique en une façon qui est vraiment époustouflante. Einstein a eu cette incroyable intuition que les fréquences devaient être quantifiées, donc leur énergie n'était pas arbitraire mais devait être un multiple entier de $h\nu$. Cette était comme un *Ansatz*, une prescription. Dirac a su en faire un

fait mathématique. Son idée était utiliser exactement la non-commutativité pour forcer une certaine quantité à être un entier.

Une fois que Dirac l'a fait, il a essayé d'appliquer la même technique afin de traiter les problèmes quantiques, domaines de systèmes plus complexes. Mais alors rien n'a fonctionné. Les expressions qu'il a écrites n'avaient aucun sens. À la fin des années 1940, des mesures plus précises de ce qu'on appelle l'agneau décalage ont été obtenus. Les efforts pour expliquer les mesures à partir de la physique ont échoué parce que la quantification

Les éléments qui auraient dû l'expliquer n'avaient pas de sens parce qu'ils étaient donnés par des intégrales divergentes.

C'était une époque terrible pour la physique. Alors des gens courageux comme [Sin-Itiro] Tomonaga et [Julian] Schwinger et [Richard] Feynman sont passés au premier plan. Ils ont manipulé les infinis pour en extraire des quantités finies et comparé ces quantités à des mesures. Pour ce qu'on appelle l'anormal moment de l'électron, la précision de l'accord était la précision de la largeur d'un cheveu dans proportionnellement à la distance de Paris à New York. Personne ne pouvait nier qu'ils avaient trébuché sur quelque chose de grand. D'un autre côté, si vous mettez un mathématicien pour regarder ce qu'ils étaient faire, vous entendriez le mathématicien crier !

Allyn Jackson : A cause de la façon dont les physiciens manipulaient les infinis ?

Alain Connes : Exact. Ils manipulaient les infinis d'une manière totalement incompréhensible, compréhensible. Ce qu'ils faisaient s'appelle la renormalisation. À partir des années 1970, je suis devenu fasciné par cela.

À la fin des années 90, je travaillais avec mon collaborateur Henri Moscovici. nous travaillions sur la cohomologie cyclique adaptée à une certaine algèbre de Hopf. Il y avait un visiteur à l'IHES, Dirk Kreimer, qui est vraiment un physicien pur et dur. Il a eu une nouvelle idée merveilleuse que, quand on est ma-

En manipulant les graphes de Feynman, il y a dans les coulisses quelque chose comme une algèbre de Hopf. Nous avons commencé travailler avec Dirk ; c'était en 1998. Nous avons rassemblé toutes les mathématiques qui ont été re- qui se cache derrière cette algèbre de Hopf.

Puis il y a eu un moment de révélation qui m'est venu en septembre 2000. Normalement, si vous faites une découverte, vous êtes debout pendant une heure, puis vous revenez sur terre. Mais alors j'étais prêt pour une semaine. La découverte était que cette technique incroyablement compliquée que les physiciens utilisent pour

La renormalisation est en fait une technique bien connue en mathématiques appelée la décomposition de Birkhoff.

Il a été lancé par [GD] Birkhoff, et Grothendieck l'a également utilisé pour prouver un très important théorème sur les fibrés vectoriels sur la sphère.

Après cela, lorsque j'ai collaboré avec Matilde Marcolli, nous avons découvert que derrière la renormalisation se trouvait non seulement la décomposition de Birkhoff, mais aussi un problème encore plus fondamental, le Riemann- problème de Hilbert. Nous avons travaillé plusieurs années là-dessus. Mais dans un sens, j'avais cessé de penser à renormalisation, car dans mon esprit c'est résolu.

Allyn Jackson : Les mathématiciens ne crient plus ?

Alain Connes : Bon, maintenant ils comprennent. Mais cela prend beaucoup de temps car les mathématiciens ne savent pas ce qu'est la renormalisation, et les physiciens ne savent pas quel est le problème de Riemann-Hilbert est !

Surmonter les préjugés contre la géométrie algébrique

Alain Connes : Je voudrais continuer l'histoire du côté théorie des nombres, car la physique et la théorie des nombres étaient constamment entrelacées dans mon esprit.

Avant de rencontrer Katia Consani et d'entamer une très longue collaboration avec elle, j'avais beaucoup de préjugés contre la géométrie algébrique. J'ai été stupide, parce que quand on a des préjugés contre quelque chose, très souvent c'est juste de l'ignorance. J'étais ignorant. Lorsque Katia Consani et moi avons commencé à travailler ensemble, j'ai appris des concepts inventés par Grothendieck, comme le concept de schème.

J'ai déjà parlé de l'espace non commutatif que j'ai découvert et qui incarne les nombres premiers. Si vous le considérez comme un espace non commutatif, vous pouvez ressentir cette compréhension fondamentale de ce l'espace manquait, en particulier sa relation à la géométrie algébrique et à d'autres points fondamentaux de vue en mathématiques.

En 2014, nous avons découvert avec Katia Consani qu'il existe un topos - au sens de Grothendieck - c'est le topos de l'arithmétique. Ce topos a immédiatement donné lieu au même espace que l'espace non-commutatif que j'avais trouvé en 1996. Cela signifiait donc que cet espace, plutôt que d'être arbitraire ou être construit dans le but de faire quelque chose, était en fait un élément absolument fondamental espace. Nous avons rédigé une note [17 des Comptes-Rendus](#) à ce sujet.

Permettez-moi d'expliquer la notion de topos, car elle est tout aussi importante que la géolocalisation non commutative. métrique et très liée à celle-ci. Vers 1958, Grothendieck découvre une nouvelle notion de l'espace géométrique, qu'il appela topos. Normalement, quand vous faites de la géométrie, vous mettez en scène l'espace que vous étudiez. L'acteur principal est l'espace, et vous parlez des points de l'espace, vous parlez de sa topologie, de sa géométrie différentielle, etc. L'idée de Grothendieck est que il y a une autre façon d'appréhender l'espace. Cette autre façon n'est pas de la mettre en scène mais pour le cacher derrière la scène, dans ce qu'on appelle en français la coulisse. Je ne suis pas sûr du terme en anglais.

Allyn Jackson : Dans le contexte du théâtre, ce serait « les coulisses ».

Alain Connes : Oui, comme au théâtre, « en coulisses ». L'espace en question sera dans les coulisses.

Vous ne verrez jamais l'espace. Son rôle sera que, pendant que vous faites des mathématiques avec l'ordinaire caractères - les entiers, les nombres réels, les espaces avec lesquels vous avez l'habitude de travailler - toutes ces choses dépendra en fait d'un paramètre qui se trouve dans les coulisses. Ce qui est dans les coulisses gouvernera un aléatoire qui sera hérité par les caractères mathématiques habituels avec lesquels vous travaillez.

C'est une idée fantastique. Techniquement parlant, qu'est-ce que cela signifie ? Au lieu de regarder l'espace, vous regardez ce qu'on appelle les gerbes d'ensembles sur l'espace. Ensuite, quand vous faites la théorie des ensembles, vous pouvez faire toutes les mathématiques que vous voulez, vous pouvez regarder des faisceaux de groupes ou des faisceaux de données topologiques les espaces. Vous pouvez récupérer l'espace et sa topologie, qui se trouve dans les coulisses, juste en regardant l'ensemble théorie "avec paramètre". Qu'est-ce qu'un point de l'espace ? Un point de l'espace est un

moyen de supprimer le caractère aléatoire des événements qui se produisent sonnent sur la scène. Ensuite, lorsque vous utilisez un point pour regarder à ce qui se passe sur scène, c'est comme si ce n'était plus aléatoire.

Ce que je trouve incroyablement révélateur, c'est que lorsque vous calculez les points d'un topos, même d'un très topos simple, vous obtenez en général un espace non commutatif ! C'est ce qui fait le lien entre le point de vue de Grothendieck, du topos, et le point de vue non commutatif géométrie. Ils sont profondément interconnectés.

Allyn Jackson : Tu n'as jamais discuté de ça avec Grothendieck.

Alain Connes : Non, malheureusement. Au début des années 1990, il avait disparu dans un endroit du Pyrénées. Même sa famille ne savait pas où il était. Il y est resté jusqu'à sa mort en 2014. Il aurait été très difficile de discuter avec lui. Il est devenu un mystique au fil des ans. Pendant l'époque où il était reclus dans les Pyrénées, il écrivit énormément, des dizaines de milliers de pages. Le sujet principal était le problème du mal. J'ai lu plusieurs de ses écrits, y compris un texte magnifique intitulé *La Clef des Songes*, dans lequel il raconte l'histoire de son père.

Je n'ai jamais rencontré Grothendieck, mais je pense que je le connais si bien, par ses écrits. Dans plusieurs de eux, il se plaint que les gens ne comprennent pas ce qu'est un topos. Cela montre à quel point il est courant que les mathématiciens disent "Ce ne sont pas des mathématiques", ou "Ce n'est pas sérieux", simplement parce qu'ils ne comprennent. Il en a beaucoup souffert. Le concept de topos est une découverte étonnante qui donne une toute nouvelle façon de penser les mathématiques. Mais à moins que vous ne fassiez un epsilon de progrès dans un sujet précis qui existe déjà et qui est bien pavé, les gens n'y prêtent pas attention.

Je ne suis pas exempt de préjugés moi-même, donc je comprends parfaitement pourquoi les gens auraient ces préjugés.

Allyn Jackson : Vous aviez un préjugé sur l'idée de topos, et sur la géométrie algébrique.

Alain Connes : Oui. Avant de comprendre ce qu'était un topos, je disais : "C'est des conneries !" Toi vraiment comprendre quelque chose que lorsque vous l'utilisez à d'autres fins, et cela dépend de la occasion que vous obtenez. Dans le travail avec Katia Consani, nous avons enfin compris qu'il y a un topos, et c'est extrêmement naturel. Cela a ouvert un point de vue totalement différent.

Allyn Jackson : Vous avez fait un lien vers de nouvelles choses, et vous vous êtes simplement lancée dedans. Vous avez fait que plusieurs fois dans votre vie. Qu'est-ce qui te permet de faire ça ? C'est ça la confiance ?

Alain Connes : Non, non, non. Je ne suis pas vraiment motivé par la confiance. Ni par curiosité. Ce que je dirait, c'est plus d'anxiété. Je passe beaucoup plus de temps à être anxieux qu'à être confiant ou être curieux. Mon esprit s'inquiète en permanence. Ce n'est pas de la confiance - d'accord, j'en ai bien sûr confiance en soi, mais ce n'est pas une sorte de confiance excessive, en aucun cas. je ne connaissais qu'une personne qui avait une confiance excessive, c'était Michael Atiyah. Je l'aimais vraiment beaucoup. il pourrait sauter à d'autres sujets. Mais je ne suis pas comme lui. Je suis beaucoup plus motivé par le fait que lorsque je ne comprendre quelque chose, ça me fait souffrir. Cela me met dans un état de misère. je me sens mal jusqu'à ce que Je comprends. C'est exactement la force de motivation.

C'est aussi pourquoi j'aime beaucoup collaborer car alors vous partagez ce malaise. Tu n'es pas seule ! Et j'aime collaborer avec des gens qui sont plus confiants que moi, précisément à cause de mon problème.

Grothendieck a écrit quelque chose dans *Récoltes et Semailles* que j'aime citer. Il a dit qu'avoir peur l'erreur est la même que craindre la vérité. Mais si l'on est prêt à affronter l'erreur, alors cette peur devient une bénédiction. On traverse cette période difficile et on en ressort bien plus.

Une grande théorie unifiée de la gravité

Allyn Jackson : Vous avez déjà parlé de regarder l'espace-temps du point de vue non commutatif de vue, ce qui donne le modèle standard couplé à la gravité. Cela ressemble à un "grand unifié théorie » des forces fondamentales. Est-ce que c'est ce que tu dis ?

Alain Connes : Laissez-moi vous expliquer cela en détail. Au milieu des années 80, j'avais réalisé que vous pourrait obtenir le secteur de Higgs du modèle standard à partir de l'image géométrique. Mais je n'avais pas quelque chose qui unifierait la gravité avec les autres forces ; qui n'est arrivé qu'en 1996, quand j'ai commencé travailler avec Ali Chamseddine. On s'est rendu compte que si l'on prend un point de vue spectral de la géométrie, alors il y a une manière naturelle de définir ce qu'on appelle en physique une « action », pour cette géométrie.

Cela permettra de mesurer à quel point la géométrie est appropriée. Cette action s'est avérée spectrale et dépend seulement sur l'élément de ligne, sur son spectre.

Pour expliquer cela, je dois faire une parenthèse, mais d'abord, pour répondre à votre question : c'est une unification.

Vous considérez la gravité pure sur un espace géométrique, et lorsque vous calculez ce que vous obtenez de la pure gravité, vous obtenez non seulement le champ de gravitation ordinaire, mais vous obtenez également les champs bosoniques du

Modèle standard et champs fermioniques. Ainsi, vous obtenez une image complète de la gravité pure. Quelque les gens ont essayé par exemple d'obtenir la gravité à partir de champs de jauge, mais ce que je dis est assez différent. Ce que je dis, c'est qu'une fois que vous introduisez une structure fine dans la géométrie de l'espace-temps, alors la gravité pure vous donnera non seulement la force gravitationnelle ordinaire, mais aussi l'autre forces de la nature, qui sont la force électrofaible et la force forte. Ce n'est donc pas une unification de jauge champs, mais c'est une unification de la gravité.

Permettez-moi maintenant d'entrer dans la digression. Pourquoi est-il naturel de visualiser un espace spectralement et de définir le action d'un invariant spectral ? Cela remonte à l'histoire de la mesure de la longueur. Il commence quelque temps avant la Révolution française. A cette époque, la France n'avait pas d'unification du ter de longueur. Si vous étiez par exemple dans le commerce du linge, vous auriez besoin d'une unité de longueur pour mesurer des pièces de linge à vendre. Ainsi chaque ville ou village affichait à son entrée une unité de longueur.

Mais les unités étaient souvent différentes, ce qui rendait les choses extrêmement compliquées. Les gens ont commencé à dire ils avaient besoin d'un moyen d'unifier la mesure de la longueur. Des scientifiques en France, mais aussi en Angleterre, beaucoup pensé à cela. Ils ont décidé que la meilleure idée serait de prendre le plus grand objet, qui est la terre, puis définir l'unité de longueur comme une certaine proportion de la circonférence de la terre. Ils ont décidé qu'un mètre serait un quarante millionième de la circonférence de la terre.

Pour mesurer la circonférence, vous mesurez un angle qui peut être défini en regardant les étoiles et puis mesurer concrètement la distance entre les deux points qui limitent l'angle. L'angle choisi était entre Dunkerque dans le nord de la France et Barcelone dans le nord de l'Espagne, qui sont plus ou moins sur la même longitude. En 1792, deux astronomes français furent chargés de mesurer cette distance. Ils ont fait des triangulations, ce qui signifie qu'ils mettraient un télescope au sommet d'une colline et faire quelques mesures. Bien sûr, quand ils ont fait ça en Espagne, qui était en guerre avec la France, c'était assez difficile d'expliquer qu'ils n'étaient pas des espions ! Il y a beaucoup d'histoires intéressantes sur que leur est-il arrivé.

Ils ont finalement obtenu une mesure raisonnablement précise. La mesure a été utilisée pour jeter un barre de platine pour représenter un mètre, et la barre a été déposée au Pavillon de Breteuil, qui est près de Paris. Cela a été considéré comme l'unité universelle de longueur dans le système métrique. Bien sûr, ce n'était pas très pratique, car si vous êtes dans un pays étranger et que vous voulez mesurer votre lit, il faut se rendre au Pavillon de Breteuil pour connaître la longueur d'un mètre ! Donc des répliques ont été faites et distribuées.

C'était bien jusqu'au début du 20e siècle. En 1925, les gens avaient de meilleures façons de longueur sûre en utilisant la spectroscopie, en comparant une longueur donnée avec une longueur d'onde d'un atome connu transition. Ils se sont alors rendu compte que la fameuse unité de longueur déposée près de Paris n'avait pas de longueur constante.

Allyn Jackson : Parce que c'était en métal ?

Alain Connes : Exactement, car le métal se contracte et se dilate. Ils ont décidé que l'appareil qui permettait aux gens de voir que la longueur de la barre de platine changeait était un meilleur appareil pour définir l'unité de longueur que la barre elle-même. Pendant un certain temps, ils ont utilisé du krypton, qui n'était pas très satisfaisant, car le krypton est très rare. Finalement, ils sont passés au césium. Aujourd'hui, on peut acheter dans un magasin un instrument bon marché basé sur la transition au césium qui vous donnera des mesures de longueur avec une précision de 10 décimales.

Lorsque j'ai défini la géométrie non commutative, je l'ai définie comme un triplet spectral. Le passage de la point de vue classique, qui était le point de vue de Riemann sur la géométrie, au point de vue nouveau qui que j'avais défini, qui est spectral, est exactement parallèle au décalage qui s'est produit en physique entre la définition de l'unité de longueur au moyen de la barre de platine, et la définition au moyen de comparaison avec les longueurs d'onde d'un produit chimique fixe. C'est très frappant.

Le principe d'action, que nous avons défini avec Chamseddine, permet alors non seulement de récupérer gravité mais de trouver la gravité couplée à la matière. Cette action mesure simplement le spectre de l'élément de ligne. La formule de la distance en géométrie non commutative utilisera le fait que le l'élément de ligne ne commute pas avec les coordonnées dans l'espace.

Sur le plan conceptuel, cela signifie qu'un paradigme de la géométrie non commutative, celui de un triplet spectral, en fait est très étroitement lié à la physique. Il a un gros avantage dans la quête de unifier la gravité avec d'autres forces, c'est-à-dire qu'elle est à la fois quantique et géométrique. Après le quantum a été découvert par Heisenberg, von Neumann a compris que la bonne étape sur laquelle se développer la mécanique quantique était l'espace de Hilbert. Donc la géométrie dont je parle est la géométrie qui est sur cette scène, dans l'espace Hilbert. Par conséquent, il convient dès le départ au quantum.

L'influence de l'intrication quantique

Allyn Jackson : Certains théoriciens de la complexité ont récemment prouvé un résultat [18](#) impliquant l'informatique quantique, l'entanglement, et ils ont ainsi résolu quelque chose appelé le problème de Tsirelson. Ceci à son tour résolu la conjecture d'encastrement de Connes. Pouvez-vous me dire quelle est cette conjecture et comment vous voir ce nouveau travail ?

Alain Connes : Tout d'abord, ce n'est pas une conjecture, c'est un problème. Quand je travaillais à Kingston en 1975, à un moment donné, je suis tombé sur une certaine propriété d'un facteur. J'ai tout de suite vu que cette propriété était moins restrictif que d'être hyperfini. Je prouvais quelque chose sur les facteurs hyperfinis et avait trouvé des exemples de facteurs qui n'étaient pas hyperfinis, mais qui remplissaient cette propriété.

La propriété est que le facteur n'est pas hyperfini mais ressemble autant à un facteur hyperfini que possible. Techniquement, cela signifie que le facteur peut être noyé dans un ultraproduct d'hyperfini les facteurs. La question est de savoir si chaque facteur de ce qu'on appelle le Type II 1 possède cette propriété. Ce que j'avais remarqué à l'époque était que tous les livres et papiers que je connaissais vérifiaient cette propriété pour le facteur associé. J'ai donc écrit à ce sujet en trois lignes dans mon article. Et - c'est l'honnête vérité ! - Je n'y ai jamais pensé plus.

Ensuite, ces quelques lignes que j'avais écrites ont été reprises par un certain nombre de personnes différentes. [Eberhard] Kirchberg a prouvé que ce problème est équivalent à quelque chose sur lequel il travaillait. Ça a été utilisé par [Dan Virgil] Voiculescu en définissant sa nouvelle notion d'entropie et par d'autres personnes dans la théorie de la complexité comme [Boris S.] Tsirelson.

Je ne sais pas à quel point l'article sur la théorie de la complexité a été vérifié. Apparemment c'est assez long.

Ce qu'il dit, en gros, c'est qu'il y a des choses qui ne peuvent pas du tout être approchées par quelque-chose qui est de dimension finie. C'est quelque chose d'assez bizarre. Ce serait probablement assez important s'ils en ont vraiment trouvé un exemple. Si l'exemple serait pertinent pour la physique,

Je n'ai aucune idée. J'ai toujours eu le sentiment, ou la croyance, que la nature est vraiment de dimension finie dans un sens; même si nous nous en approchons par quelque chose de continu, tout est essentiellement de dimension finie.

Comme je l'ai dit, je ne me suis jamais penché sur le problème. Je suis vraiment la pire personne à qui demander !

Allyn Jackson : Le résultat de la théorie de la complexité concerne l'intrication quantique. Est ce que ca vous intéresse ?

Alain Connes : L'intrication est quelque chose que je trouve extrêmement intéressant et important, mais pour une raison différente. Le livre que nous avons écrit avec ma femme et Dixmier contient une phrase provocatrice.

En français, c'est « *l'aléa de quantique est le tic-tac de l'horloge divine.* » En anglais, cela pourrait être « *the le caprice du quantum est le tic-tac de l'horloge divine.* »

La raison pour laquelle le temps passe, et passe d'une manière que nous ne contrôlons pas du tout, c'est précisément le manque de reproductibilité du quantum. Lorsque vous envoyez un photon à une cible, vous ne pourrez jamais reproduire le résultat. C'est quelque chose de totalement aléatoire et

incontrôlable. J'ai pu, dans une certaine mesure, développer une théorie qui aurait le temps de jaillir de ce hasard quantique, comme je l'ai expliqué plus tôt. Mais si vous avez un temps au point A et un temps au point B, et l'aléatoire quantique en A et le hasard quantique en B, il n'y aurait aucun lien du tout. Droite ? Non, ce n'est pas vrai, parce que si en A et B vous mesurez le caractère aléatoire quantique à partir d'états intriqués, alors vous obtiendrez résultats qui sont corrélés. Le caractère aléatoire quantique est corrélé par l'intrication quantique.

Il faudrait un esprit comme celui d'Einstein pour inventer une notion du temps qui jaillirait du quantitatif. et cela nous mettrait en paix avec l'enchevêtrement et nous dirait que l'enchevêtrement n'est que l'harmonie ou la corrélation entre les divers hasards en divers points. je crois que la personne qui pourrait être le plus proche de cela est [Anton] Zeilinger, un physicien suisse qui a fait des expériences sur enchevêtrement pour des points très éloignés, des points distants de plus de 100 kilomètres. [19](#) j'ai entendu un discours de lui dans lequel il a dit qu'ils cherchaient des choses qui ne peuvent pas être empêtrées dans leur expériences. Les mathématiques de l'évolution du temps, plus la compréhension de l'intrication – là il y a suffisamment de choses là-bas pour créer un point de vue complètement nouveau à temps.

Ce qui est extrêmement troublant dans l'intrication, c'est que si vous avez deux états intriqués et que vous faites une observation sur l'un, il agit immédiatement sur l'autre et vous donne un résultat corrélé.

Einstein était contrarié à ce sujet et l'a qualifié d'"action effrayante à distance". Effrayant est le mot juste.

Alain Aspect a effectué des mesures montrant que l'effet est beaucoup plus rapide que la vitesse de la lumière.

Cela semble contredire le principe de relativité. Mais en fait, ce n'est pas le cas, car vous ne pouvez pas transmettre les informations. Supposons que vous ayez deux états corrélés, de sorte que si vous trouvez un plus dans un, l'autre sera moins, ou si vous trouvez moins, alors l'autre sera plus. La réponse, plus ou moins, est pas mon propre choix; c'est le résultat de l'expérience. L'autre gars avait moins ou plus, mais il va obtenir aucune information de moi. Ce n'est pas un moyen de transmettre des informations, donc cela ne contredit pas le principe de relativité.

C'est quand même gênant. Si je suis dans un cadre différent, ce ne sera pas que quelque chose a d'abord été fait à le point A puis le point B ont réagi ; ce sera que cela a été fait d'abord au point B et ensuite A a réagi.

Lorsque vous avez des événements de type spatial vus à partir de différents cadres de référence, l'un peut être avant et le l'autre peut être après, ou vice versa. C'est votre propre choix. Cela signifie que la notion de causalité, ou la notion de temps, est totalement bouleversée par le phénomène d'intrication. Je l'interprète comme signifiant qu'il existe quelque chose de plus primitif que le temps qui passe, qui est le hasard quantique.

[Le don de l'hypothèse de Riemann](#)

Allyn Jackson : Comment voyez-vous les perspectives de prouver l'hypothèse de Riemann ?

Alain Connes : J'ai beaucoup travaillé là-dessus et j'ai fait quelques progrès récemment avec Katia Consani. Mais jusqu'à ce que vous ayez terminé, vous ne pouvez rien dire.

Mais il y a une image mentale du problème qui est réconfortante. Le problème est comme un pôle infini, et vous voulez montrer que le poteau est vertical. C'est l'image mentale. Avec Katia, c'est comme si nous étions des fondations de plus en plus serrées et de plus en plus serrées. Il y a un

ensemble infini d'escaliers, mais chaque pas que vous faites dans les escaliers bloque en fait le poteau, pour le rendre de plus en plus vertical.

Ce que nous avons fait récemment, c'est franchir la première marche de l'escalier.

Les escaliers sont infinis. Mais la beauté c'est que, grâce à une idée d'André Weil, il suffit de considérer un nombre fini de nombres premiers à la fois pour résoudre le problème. Si vous vous en tenez à cette idée, alors vous êtes assurés de ne pas tomber dans le trou noir de prouver des résultats équivalents à l'hypothèse de Riemann.

Ce que j'ai trouvé en 1996, c'est quelque chose de difficile quand on l'applique à l'infini des nombres premiers, mais cela, quand vous l'appliquez seulement à un nombre fini de nombres premiers, vous donne exactement l'espace de Hilbert et le cadre de calcul quantifié qui est apparemment très approprié pour attaquer le problème.

On peut avoir de l'espoir, mais jusqu'à ce que vous ayez terminé, oubliez-le - vous ne pouvez rien dire. J'aime travailler sur ce problème parce que c'est une épreuve de moi-même à laquelle je ne peux pas échapper. Ce n'est pas comme si tu construisais une nouvelle théorie, et alors vous pouvez penser que vous êtes le plus grand. En mathématiques, il n'y a pas de meilleure façon de progrès que d'être confronté à un problème que vous ne pouvez pas résoudre. Si vous travaillez sur un problème que vous pouvez résoudre, cela signifie que ce n'est pas le bon problème. Se battre avec un problème très difficile est une bien meilleure façon de construire une image mentale que lorsque vous travaillez sur un problème facile. Quand l'esprit est bloqué, il a beaucoup plus de pouvoir à construire et à concevoir. Je vois un problème comme ça comme un cadeau.

Avec ma femme et mon professeur Jacques Dixmier, nous avons écrit un deuxième roman intitulé *Le Spectre d'Atacama* . [20](#) Il raconte l'histoire d'un mathématicien confronté à l'hypothèse de Riemann.

Il se rend compte que les êtres de l'espace envoient des spectres à la terre et que ces spectres contiennent les zéros de la fonction zêta de Riemann. J'ai récemment publié dans le *Journal of Mathematics et Musique* un article [21](#) qui vient d'un problème auquel nous avons été exposés lors de l'écriture du livre.

Le mathématicien et les autres scientifiques devaient s'assurer que l'être communiquant avec eux de l'espace extra-atmosphérique était un être intelligent et non une machine. Ils ont donc dû concevoir un Turing Un test qui les rendrait complètement sûrs. Un tel test est possible, et il est lié à André Les travaux de Weil sur l'hypothèse de Riemann. Il a découvert que lorsque vous travaillez avec des champs de fonction, tous les zéros de l'analogue de zêta sont sur la ligne critique et ils sont périodiques - ils se répètent périodiquement.

Ce que nous avons réalisé en écrivant le livre, c'est le lien avec ce que le compositeur [Olivier] Messiaen avait inventé avec ses *rythmes non rétrogradables* . Les motifs rythmiques de Messiaen ont exactement la même propriété que les motifs périodiques que vous trouvez à partir des zéros de l'analogue de Weil de la fonction zêta de Riemann.

Les motifs rythmiques de Weil sont associés à chaque prime. Ce que les personnages du livre ont fait était de envoyer dans l'espace les motifs associés aux nombres premiers, mais ils omettent un nombre premier. Si les êtres recevant le message étaient vraiment intelligents, ils répondraient en envoyant le modèle pour le premier manquant.

Allyn Jackson : Votre femme est-elle écrivaine ?

Alain Connes : Ma femme est maintenant à la retraite, mais elle était professeur de latin et de grec au lycée.

C'est une personne littéraire. Nous sommes très complémentaires. Elle en sait tellement que je ne sais pas.

Allyn Jackson : Dixmier a écrit de la science-fiction quand il était plus jeune, non ?

Alain Connes : Oui, il a écrit de la science-fiction et aussi des romans policiers. La façon dont notre premier roman commencé, c'est qu'à l'été 2012, Dixmier nous a envoyé une carte postale. La carte postale disait : « J'ai le titre du livre. Vous l'écrivez, et je le relirai ! Bien sûr, nous avons ri. Ensuite, ma femme et moi avons fait un voyage à Venise et avons visité un petit musée avec une exposition de de l'art moderne très frappant, y compris une sculpture de [Maurizio] Cattelan. La sculpture montrait neuf cadavres, grandeur nature, alignés les uns à côté des autres. J'ai vu la sculpture, et juste alors un prix avait été donné à neuf personnes ! ²² Cela a immédiatement déclenché quelque chose dans mon esprit, et j'ai commencé rédiger un brouillon du livre que Dixmier avait suggéré.

Quand ma femme a vu le brouillon, elle a dit : « Non, c'est horrible ! » Puis elle a pris le relais. Elle a réussi à sauver l'idée, même si ce qu'elle a écrit était totalement différent. Elle a commencé à écrire sur un jeune physicienne à qui l'on demande de prendre la tête du CERN. C'était donc le point de départ de la livre. Étonnamment, quelques années après la parution du livre, une Italienne, Fabiola Gianotti, a été nommé à la tête du CERN !

J'aime toujours ces motivations très étranges, très étranges, comme un coup de pied, pour commencer quelque chose.

Allyn Jackson : Vous semblez avoir une vie vraiment amusante.

Alain Connes : Bien sûr. J'essaye au moins ! Mais comme je l'ai dit, ce n'est pas tellement amusant à cause de la persistance anxiété.

Allyn Jackson : Mais comme tu l'as dit à propos de Grothendieck, l'angoisse te pousse vers la vérité.

Alain Connes : Exactement.

Notes

Transcription Latex d'une interview d'Alain Connes par Allyn Jackson consultable ici

[https://celebratio.org/Connes A /article/ 842 /](https://celebratio.org/Connes_A/article/842/).

(Denise Vella-Chemla, février 2021).

1. *Le Théâtre quantique*, d'Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier. Odile Jacob, 2013.
2. *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* a été écrit par Alexander Grothendieck entre 1983 et 1986. Il a imprimé et distribué lui-même des exemplaires mais ne l'a jamais publié.
3. Alain Connes, « Ordres faibles et localisation des zéros de polynômes », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB* **269** (1969), A373-A376.
4. Masamichi Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Mathématiques*, vol. 128, Springer-Verlag, 1970. <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0065832>.
5. Huzihiro Araki et EJ Woods, « A classification of factor », *Publications du Research Institute for Mathématique Sciences Série A* **4** (1968/1969), 51-130. https://www.ems-ph.org/journals/show_abstract.php?issn=0034-5318vol=4iss=1rang=4.

6. Alain Connes, « Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB* **274** (1972), A175-A177.
7. Alain Connes, « Une classification des facteurs de type III », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série AB* **275** (1972), A523-A525.
8. Deux mois après cette interview, Vaughan Jones est décédé à l'âge de 67 ans.
9. Alain Connes, « C^* -algèbres et géométrie différentielle », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB* **290** (1980), n° 13, A599-A604.
10. Alain Connes et Henri Moscovici, « Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques », *Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Série I. Mathématique* **307** :9 (1988), 475-480.
11. Alain Connes, « Interprétation géométrique du modèle standard de la physique des particules et structure fine de l'espace-temps », *Comptes-rendus de l'Académie des sciences. Série Générale. La Vie des Sciences* **10** :3 (1993), 223-234.
12. Ali H. Chamseddine, Alain Connes, et Viatcheslav Mukhanov, « La géométrie et le quantum : les bases », *Journal de Physique des Hautes Energies* (2014) n° 12, 098.
[https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP12\(2014\)098](https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP12(2014)098).
13. Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994. Il s'agit d'un édition de l'édition française, *Géométrie non commutative*, publiée par InterEditions en 1990.
14. Jean-Benoît Bost et Alain Connes, « Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de la symétrie dans la théorie des nombres », *Selecta Mathematica (NS)* **1** :3 (1995), 411-457.
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01589495>.
15. Alain Connes, « Formule de trace en géométrie non commutative et hypothèse de Riemann », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I Mathématique* **323** :12 (1996), 12, 1231-1236.
16. Alain Connes et Caterina Consani, « Weil positivity and trace formula, the archimedean place », ont soumis à arXiv le 25 juin 2020. <https://arxiv.org/abs/2006.13771>.
17. Alain Connes et Caterina Consani. « Le site arithmétique », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **352** :12 (2014), 971-975.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X14001666?via%3Dihub>.
18. Zhengfeng Ji, Anand Natarajan, Thomas Vidick, John Wright et Henry Yuen, " $MIP^* = RE$ ", soumis à arXiv le 13 janvier 2020. <https://arxiv.org/abs/2001.04383>.
19. X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, J. Kofler, E. Anisimova, V. Makarov, T. Jennewein, R. Ursin et A. Zeilinger, « Téléportation quantique sur 143 kilomètres en utilisant l'anticipation active », *Nature* **489** (2012), 269-273.
<https://www.nature.com/articles/nature11472>.
20. Alain Connes, Danye Chéreau, et Jacques Dixmier, *Le Spectre d'Atacama*, Odile Jacob, 2018.
21. Alain Connes, « Motivé Rythmes », à paraître dans *Revue de Mathématiques et Musique*.
<https://arxiv.org/pdf/1812.09946.pdf>.
22. Le Breakthrough Prize in Fundamental Physics a été décerné pour la première fois en 2012, à neuf personnes : Nima Arkani-Hamed, Alan Guth, Alexei Kitaev, Maxim Kontsevich, Andrei Linde, Juan Maldacena, Nathan Seiberg, Ashoke Sen et Edward Witten.