

Annexe 1 : Rappel historique

Citons Charles-Ange Laisant dans la note intitulée *Sur un procédé expérimental de vérification de la conjecture de Goldbach* du Bulletin de la SMF n°25 de 1897.

Ce fameux théorème empirique : Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l'objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d'établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l'a vérifiée numériquement jusqu'à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.

Voici un procédé qui permettrait de faire sans calcul la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions. Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d'Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu'à une limite quelconque $2n - 1$.



FIGURE 1

Si l'on a construit deux réglettes pareilles, et si l'on place la seconde au-dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case 1 à $2n^$, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour $2n$, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre 28 donnera la figure 2 et montrera qu'on a les décompositions $28 = 5 + 23 = 11 + 17$.*

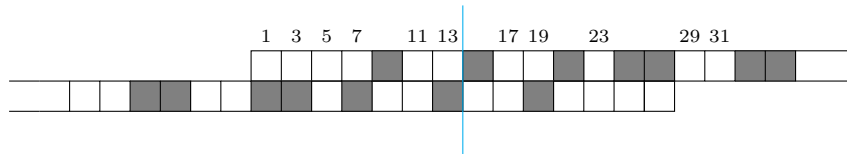


FIGURE 2

On comprend que les réglettes étant construites à l'avance, et un simple glissement permettant de passer d'un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.

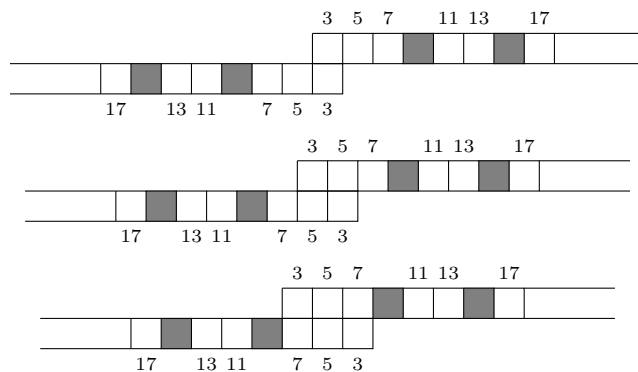


FIGURE 3

*. Ici devrait être écrit $2n - 1$.

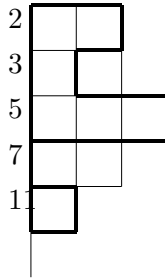


FIG. 2 – $N = 16500$

évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.

Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres ; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (fig.3) le plus grand commun diviseur D des deux nombres $N = 1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ et $N' = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, leur plus grand commun diviseur $D = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ et leur plus petit commun multiple $p = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 41580$, en figurant les deux nombres au moyen de carrés colorés.

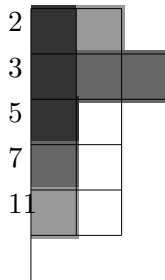


FIG. 3 – pgcd et ppcm

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés A en rouge, B en bleu et C en jaune, les plus grands communs diviseurs seront figurés celui de A et B par la partie violette, celui de B et C par la partie verte, celui de A et C par la partie orangée.

Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre A est multiple d'un autre nombre B, le contour de la figuration de A contient le contour de la figuration de B, et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations des deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numérotation dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit : 360 s'écrirait 321, 16500 s'écrirait 21301, 1890 s'écrirait 1311, 660 s'écrirait 21101, 30 s'écrirait 111, 41580 s'écrirait 23111. Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra). La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand commun diviseur est évidente ; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est également le produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.

Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.

Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.

Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.

Annexe 2 : extrait de la communication de Laisant “Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach”

Ce fameux théorème empirique : *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l’objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d’établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l’a vérifiée numériquement jusqu’à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.

Voici un procédé qui permettrait de faire sans calculs la vérification expérimentale dont il s’agit, et d’avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d’une figure, toutes les décompositions.

Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d’Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu’à une limite quelconque $2n - 1$.

Fig. 1



Si l’on a construit deux réglettes pareilles, et si l’on place la seconde au dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case 1 à $2n - 1$, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour $2n$, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre 28 donnera la figure 2 et montrera qu’on a les décompositions $28 = 5 + 23 = 11 + 17$.

Fig. 2



On comprend que les réglettes étant construites à l’avance, et un simple glissement permettant de passer d’un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.