Transcription de la traduction de Laugel en français de l'article de Bernhard Riemann (Denise Vella-Chemla, 24.6.2017)

wikisource Note de Riemann

SUR LE NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFERIEURS A UNE GRANDEUR DONNEE

Monatsberichte der Berliner Akademie, novembre 1859.
Oeuvres de Riemann, $2^{ième}$ édition, pages 145-155.

Je ne crois pouvoir mieux exprimer mes remerciements à l'Académie pour la distinction à laquelle elle m'a fait participer en m'admettant au nombre de ses Correspondants qu'en faisant immédiatement usage du privilège attaché à ce titre pour lui communiquer une étude sur la fréquence des nombres premiers. C'est un sujet qui, par l'intérêt que Gauss et Dirichlet lui ont voué pendant de longues années, ne me semble peut-être pas indigne de faire l'objet d'une telle Communication.

Je prendrai pour point de départ dans cette étude la remarque faite par Euler[1] que le produit

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

lorsque p prend pour valeur tous les nombres premiers et n tous les nombres entiers. La fonction de la variable complexe s, qui sera représentée par ces deux expressions, tant qu'elles convergent, je la désignerai par $\zeta(s)$. Toutes deux convergent qu'autant que la partie réelle de s est supérieure à 1. Néanmoins il est facile de trouver pour la fonction une expression qui reste toujours valable.

En faisant usage de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\prod(s-1)}{n^s}$$

on obtient d'abord

$$\prod(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

Si maintenant l'on considère l'intégrale

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

prise dans le sens positif de $+\infty$ à $+\infty$ et autour d'un domaine de grandeurs qui contient à son intérieur la valeur 0 mais qui ne contient aucune autre valeur de discontinuité de la fonction sous le signe d'intégration, on obtient aisément pour la valeur de cette intégrale

$$(e^{-\pi si}-e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

en faisant l'hypothèse que dans la fonction multiforme

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)log(-x)}$$

le logarithme de $-x$ est déterminé de telle sorte qu'il soit réel pour x négatif. On aura donc

$$2\ sin\ \pi s\prod(s-1)\zeta(s) = i\int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

l'intégrale étant définie de la manière indiquée ci-dessus.

Cette équation donne maintenant la valeur de la fonction $\zeta(s)$ pour chaque valeur complexe de s et nous enseigne que cette fonction est uniforme, qu'elle est finie pour toutes les valeurs finies de s, sauf 1, et aussi qu'elle s'évanouit lorsque s est égal à un entier pair négatif[2].

Lorsque la partie réelle de s est négative, l'intégrale, au lieu d'être prise dans le sens positif autour du domaine de grandeurs assigné, peut être prise dans le sens négatif autour du domaine de grandeurs qui contient toutes les grandeurs complexes restantes, car l'intégrale, pour des valeurs dont le module est infiniment grand est alors infiniment petite. Mais, à l'intérieur de ce domaine, la fonction sous le signe d'intégration ne devient discontinue que lorsque x est égal à un multiple entier de $\pm 2\pi i$ et l'intégrale, par conséquent, est égale à la somme des intégrales prises dans le sens négatif autour de ces valeurs. Mais l'intégrale relative à la valeur $n2\pi i$ égale $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; on obtient donc

$$2sin\ \pi s \prod(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}]$$

c'est-à-dire une relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(s-1)$ qui, en vertu de propriétés connues de la fonction $\prod$ peut aussi s'exprimer ainsi : la quantité

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

reste inaltérée lorsque s est remplacé par $1-s$.

Cette propriété de la fonction m'a engagé à introduire, au lieu de l'intégrale $\prod(s-1)$, l'intégrale $\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)$ dans le terme général de la série $\sum \frac{1}{n^s}$, ce qui fournit une expression très commode de la fonction $\zeta(s)$. On a en effet

$$\frac{1}{n^s}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx;$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x} = \psi(x)$$

on a

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx;$$

ou bien, puisque

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)^{[3]},$$

on a encore

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(x)\left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx$$

Je pose maintenant

$$s = \frac{1}{2}+ti$$

et

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t)$$

en sorte que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}cos\left(\frac{1}{2}t\ log\ x\right)dx,$$

ou encore

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx}x^{-\frac{1}{4}}cos\left(\frac{1}{2}t\ log\ x\right)dx$$

Cette fonction est finie pour toutes les valeurs finies de t et peut être développée suivant les puissances de t^2 en une série qui converge très rapidement. Puisque, pour une valeur de s dont la partie réelle est plus grande que 1, $log\ \zeta(x) = -\sum log(1-p^{-s})$ reste fini et que ce même fait a lieu pour les logarithmes des facteurs restants de $\xi(t)$, la fonction $\xi(t)$ peut seulement s'évanouir lorsque la partie imaginaire de t se trouve comprise entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$. Le nombre de racines de $\xi(t)=0$ dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T est environ égal à

$$\frac{T}{2\pi}log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

car l'intégrale $\int d\ log\ \xi(t)$ prise le long d'un contour décrit dans le sens positif, comprenant à son intérieur l'ensemble des valeurs de t dont les parties imaginaires sont comprises entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$ et les parties réelles entre 0 et T est égale (abstraction faite d'une partie fractionnaire de même ordre de grandeur que la grandeur $\frac{1}{T}$) à $(T log \frac{T}{2\pi} - T)i$; or cette intégrale est égale au nombre de racines de $\xi(t) = 0$ situées dans ce domaine, multiplié par $2\pi i$. On trouve, en effet, entre ces limites un nombre environ égal à celui-ci, de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles[4].

Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.

Si l'on désigne par α toute racine de l'équation $\xi(\alpha) = 0$, on peut exprimer $log\ \xi(t)$ par

$$\sum log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) + log\ \xi(0)$$

En effet, puisque la densité des racines de grandeur t augmente seulement avec t comme le fait $log\ \frac{t}{2\pi}$, cette expression converge et pour t infini ne devient infinie que comme l'est $t\ log\ t$; elle diffère de $log\ \xi(t)$ par conséquent d'une fonction de t^2 qui, pour t fini, reste finie et continue et qui, divisée par t^2, sera infiniment petite pour t infini.

Cette différence, par suite, est une constante dont la valeur peut être déterminée en posant $t = 0$.

A l'aide de ces principes auxiliaires, nous pouvons maintenant déterminer le nombre des nombres premiers qui sont inférieurs à x.

Soit $F(x)$ ce nombre lorsque x n'est pas exactement égal à un nombre premier, et soit $F(x)$ ce nombre augmenté de $\frac{1}{2}$ lorsque x est premier, de telle sorte que, pour une valeur de x, pour laquelle $F(x)$ varie par un saut brusque, on ait,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Si, maintenant, dans l'expression

$$log\ \zeta(s) = -\sum log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s}$$

on remplace p^{-s} par $s\int\limits_p^\infty x^{-s-1}dx, p^{-2s} = s\int\limits_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx, \ldots$, on obtient

$$\frac{log\ \zeta(s)}{s} = \int\limits_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx,$$

où l'on a désigné par $f(x)$ l'expression $F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$

Cette équation a lieu pour toute valeur complexe $a + bi$ de s, pourvu que $a > 1$. Mais lorsque, sous ces hypothèses, l'équation suivante

$$g(s) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-s}d\ log\ x$$

a lieu, l'on peut, à l'aide du théorème de Fourier, exprimer la fonction h par la fonction g. Cette équation, quand $h(x)$ est réel et que

$$g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b)$$

se décompose en les deux suivantes :

$$g_1(b) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int\limits_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

Lorsque l'on multiplie les deux équations par

$$[\cos(b\log y) + i\sin(b\log y)]\, db,$$

et que l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$, l'on obtient, en vertu du théorème de Fourier, dans les seconds membres des deux équations $\pi h(y) y^{-a}$, et, par conséquent, en ajoutant les deux équations et multipliant par iy^a, on a

$$2\pi i h(y) = \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s ds,$$

où l'intégration doit être prise de telle sorte que la partie réelle de s reste constante[5].

Cette intégrale représente, pour une valeur de y pour laquelle a lieu une variation par saut brusque de la fonction, la valeur moyenne des valeurs de la fonction h de chaque côté du saut. Avec les modes de détermination exposés ci-dessus, la fonction $f(x)$ possède cette même propriété, et l'on a donc, d'une manière générale,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds$$

On peut maintenant substituer à *log* ζ, l'expression trouvée précédemment[6]

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \prod \frac{s}{2} + \sum_{\alpha} \log \left[1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right] + \log \xi(0)$$

Mais les intégrales de chaque terme de cette expression, prises jusqu'à l'infini, ne convergent pas ; il sera donc convenable de transformer l'équation précédente à l'aide d'une intégration par parties en

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

Comme

$$-\log \prod \frac{s}{2} = \lim \left[\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2} \log m\right],$$

pour $m = \infty$, et que, par suite

$$-\frac{d \frac{1}{s} \log \prod \left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty} \frac{d \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

tous les termes de l'expression de $f(x)$, à l'exception de

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s^2} \log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0),$$

prennent alors la forme

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds} x^s ds.$$

Mais on a maintenant

$$\frac{d\left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right]}{d\beta} = \frac{1}{(\beta - s)\beta}$$

et, lorsque la partie réelle de s est plus grande que la partie réelle de β,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta - s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int\limits_{\infty}^{x} x^{\beta-1} dx,$$

ou bien

$$= \int\limits_{0}^{x} x^{\beta-1} dx,$$

selon que la partie réelle de β est négative ou positive. On a donc, dans le premier cas,

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds}x^s ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds$$

$$= \int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx + \text{const.},$$

et, dans le second cas,

$$= \int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx + \text{const.}$$

Dans le premier cas, la constante d'intégration peut être déterminée en faisant tendre la partie réelle de β vers l'infini négatif.

Dans le second cas, l'intégrale de 0 à x prend des valeurs qui diffèrent de $2\pi i$, lorsque l'intégrale relative à des valeurs complexes est prise dans le sens positif ou dans le sens négatif, et elle sera, prise dans ce dernier sens, infiniment petite lorsque le coefficient de i dans la valeur de β est égal à l'infiniment grand positif ; mais ce fait aura lieu, dans le premier cas, lorsque le coefficient est égal à l'infiniment grand négatif.

Ceci nous enseigne comment $log(1-\frac{s}{\beta})$ doit être déterminé dans le premier membre de manière à faire disparaître la constante d'intégration.

En portant ces valeurs dans l'expression de $f(x)$ on obtient

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\alpha}\left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]$$

$$+\int_x^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0),$$

[7],[8]

où, dans la série $\sum\limits_{\alpha}$ on donnera à α pour valeurs toutes les racines positives (ou à parties réelles positives) de l'équation $\xi(\alpha) = 0$ en les rangeant par ordre de grandeur. On peut alors, après une discussion plus approfondie de la fonction ξ, démontrer aisément que lorsque les termes sont rangés, comme il est prescrit ci-dessus, dans la série

$$\sum\left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right],$$

celle-ci converge vers la même limite que l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left[1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right]}{ds}x^s ds,$$

lorsque la grandeur b croît sans limites. Mais, si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle.

A l'aide de $f(x)$ l'on obtient $F(x)$ par inversion de la relation

$$f(x) = \sum\frac{1}{n}F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

ce qui donne l'équation

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

où m doit être remplacé successivement par tous les nombres qui ne sont divisibles par aucun carré excepté 1 et où μ désigne le nombre des facteurs premiers de m.

Si on limite $\sum\limits_{\alpha}$ à un nombre fini de termes, la dérivée de l'expression $f(x)$ c'est-à-dire, abstraction faite d'une partie qui décroît très rapidement lorsque x croît,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum_{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x},$$

fournit une expression approchée pour la densité des entiers premiers + la moitié de la densité des carrés, + le tiers de celle des cubes, + . . . des entiers premiers inférieurs à x.

La formule approchée connue $F(x) = Li(x)$ n'est, par conséquent, exacte qu'aux grandeurs près de l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$ et fournit une valeur un peu trop grande ; car les termes non périodiques[9] dans l'expression de $F(x)$ sont, abstraction faite de grandeurs qui ne croissent pas indéfiniment avec x,

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \ldots$$

Du reste, la comparaison, entreprise par Gauss et Goldschmidt[10], de $Li(x)$ avec le nombre de nombres premiers inférieurs à x et poursuivie jusqu'à x = trois millions a révélé que ce nombre, à partir de la première centaine de mille, est toujours inférieur à $Li(x)$ et que la différence des valeurs, soumises à maintes oscillations, croît néanmoins toujours avec x[11]. Mais la fréquence et la réunion plus dense par endroits des nombres premiers, si l'on peut s'exprimer ainsi, sous l'influence des termes périodiques, avaient déjà attiré l'attention, lors du dénombrement des nombres premiers, sans que l'on eût aperçu la possibilité d'établir une loi à ce sujet.

Il serait intéressant dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $F(x)$ serait obtenue à l'aide de la fonction $f(x)$ qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec $Li(x) + log\ \xi(0)$.

Notes

1. Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum.* Bd. 1. Lausanne 1748, p. 221-252, ch. 15 (*De Seriebus ex evolutione Factorum ortis*).

2. [Note du trad.] Ce mode d'existence de la fonction $\zeta(s)$ se reconnaît en se servant de la seconde forme de cette fonction

$$2\zeta(s) = \pi i \prod(-s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{s-2}}{e^{x-1}} dx$$

et en remarquant, en outre, que $\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{2}$, dans le développement suivant les puissances ascendantes de x, ne contient que des puissances impaires.

3. Riemann se réfère à Carl Gustav Jacob Jacobi, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum.* Königsberg 1829, p. 184, § 65, Nr. 6. La formule utilisée n'est pas donnée ici explicitement ; Jacobi la déduit à un autre endroit dans *Suite des notices sur les fonctions elliptiques.*, in Journal de Crelle 3 (1828), p. 303-310.

4. Cette phrase constitue le premier énoncé de "l'hypothèse de Riemann".

5. Note du trad. L'énoncé de ce théorème manque de rigueur. Les deux équations traitées séparément comme il est indiqué, les limites d'intégration $0, \infty$ se rapportant à $log\ x$, donnent

$$\pi y^{-\alpha}\left[h(y) \pm h\left(\frac{1}{y}\right)\right],$$

et, par conséquent, fournissent en premier lieu par leur somme la formule du texte.

6. Le manuscrit Lien du Clay Mathematical Institute (p. 4) et les *Gesammelte Werke* (p. 141) introduisent encore un $\sum\limits_{\alpha}$ devant l'avant-dernier logarithme. Dans les *Monatsberichte* le signe somme manque :

$$\frac{s}{2} log\ \pi - log(s-1) - log \prod \frac{s}{2} + log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + log\ \xi(0)$$

7. Note HME 1974, p. 31. Riemann écrit $log\ \xi(0)$ à la place de $-log\ 2$, mais puisqu'il utilise ξ pour noter une fonction différente à savoir la fonction $\xi(\frac{1}{2} + it)$, son $\xi(0)$ dénote $\xi(\frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2}$. Cette erreur a été

détectée du vivant de Riemann par Angelo Genocchi (1817-1889), *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite*, in Annali di Matematica Pura ed Applicata 3 (1860), p. 52-59.

8. Note du trad. La fonction $Li(x)$ doit être définie pour les valeurs réelles de x qui sont plus grandes que 1 par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{log\ x} \pm \pi i$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou bien le signe inférieur, selon que l'intégration est prise relativement à des valeurs complexes dans le sens positif ou bien dans le sens négatif. De là l'on déduit aisément le développement donné par Scheibner (Schlömilch's Zeitschrift, t. V)

$$Li(x) = log\ log\ x - \Gamma'(1) + \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(log\ x)^n}{n.n!},$$

qui est valable pour toutes les valeurs de x, et présente une discontinuité pour les valeurs réelles négatives (comparer la correspondance entre Gauss et Bessel).

Si l'on poursuit le calcul indiqué par Riemann, on trouve dans la formule $log\ \frac{1}{2}$ au lieu de $log\ \xi(0)$. Il est très possible que ceci ne soit qu'un *lapsus calami*, ou une faute d'impression, $log\ \xi(0)$ au lieu de $log\ \zeta(0)$; en effet, $log\ \zeta(0) = \frac{1}{2}$.

9. Note H.M.E. En toute rigueur, les termes $Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})$ ne sont pas périodiques mais oscillatoires.

10. Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt (1807-1851), un élève de Gauss.

11. Lettre de Carl Friedrich Gauss à Johann Franz Encke (1791-1865) du 24 décembre 1849.