

Conseils au débutant
Alain Connes
Collège de France,
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
Université de Vanderbilt.

Les mathématiques sont la colonne vertébrale de la science moderne et une source remarquablement efficace de nouveaux concepts et outils pour comprendre la réalité à laquelle nous participons. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée humaine.

On m'a demandé de donner quelques conseils aux jeunes mathématiciens. La première observation est que chaque mathématicien est un cas particulier et en général, les mathématiciens ont tendance à se comporter comme des "fermions", i.e. à éviter de travailler dans des endroits trop "branchés" alors que les physiciens se comportent comme des "bosons" qui fusionnent en gros paquets et souvent "sur-vendent" leurs travaux, une attitude que les mathématiciens méprisent.

Il peut être tentant à première vue de voir les mathématiques comme l'union de parties séparées telles que la Géométrie, l'Algèbre, l'Analyse, la Théorie des nombres, etc. avec la Géométrie dominée par la compréhension du concept d'"espace", l'Algèbre par l'art de manipuler les "symboles", l'Analyse par l'accès à l'infini et le continu, etc.

Cela pourtant ne rend pas justice à l'une des caractéristiques les plus essentielles du monde mathématique, notamment au fait qu'il est virtuellement impossible d'isoler l'une quelconque des parties ci-dessus des autres sans la priver de son essence. En cela, le corpus mathématique ressemble à une entité biologique qui ne peut survivre que comme un tout et qui mourrait si on la coupait en morceaux disjoints.

La vie scientifique des mathématiciens peut être décrite comme un voyage à l'intérieur de la géographie de la "réalité mathématique" qu'ils révèlent graduellement dans leur schéma mental personnel.

Traduction de l'article Advice to the beginner ici
<http://alainconnes.org/docs/Companion.pdf>

Cela commence souvent par un acte de rébellion par rapport à la description dogmatique existante qu'on peut trouver dans les livres de la littérature mathématique. Les jeunes "mathématiciens-en-devenir" réalisent dans leur propre esprit que leur perception du monde mathématique capture quelques aspects qui ne s'adaptent pas au dogme existant. Ce premier acte est souvent dû à l'ignorance mais il permet à la personne de se libérer de la révérence à l'autorité en l'enjoignant à faire confiance à son intuition propre, à condition que celle-ci s'appuie sur des démonstrations effectives. Lorsque ces jeunes mathématiciens acquièrent une réelle connaissance, obtenue d'une manière originale et "personnelle", d'une petite partie du monde mathématique, aussi ésotérique qu'elle puisse avoir l'air au départ ¹, leur voyage peut vraiment commencer. C'est bien sûr vital tout au long du parcours de ne pas rompre ce "fil d'Ariane" qui permet de garder constamment un regard neuf sur tout ce que l'on pourra rencontrer en chemin, et de revenir à la source lorsqu'on se sent perdu parfois...

Il est aussi vital de toujours rester en mouvement. Le risque sinon est de rester confiné dans une petite zone de spécialisation extrêmement technique, rétrécissant notre perception du monde mathématique et de sa diversité déroutante.

Le point vraiment fondamental par rapport à ça c'est qu'alors que de nombreux mathématiciens ont passé leur vie scientifique entière à explorer ce monde, ils tombent tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de l'itinéraire, un jour ou l'autre, on est amené à atteindre une ville bien connue, i.e. par exemple à rencontrer les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zeta. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connecté". Bien sûr, cela ne signifie pas que toutes les parties des mathématiques se ressemblent et il convient de citer Grothendieck (dans "Récoltes et semailles") dans sa comparaison du paysage de l'analyse dans laquelle il a travaillé au départ avec celui de la géométrie algébrique dans laquelle il a passé le reste de sa vie mathématique :

"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît

1. Mon point de départ a été la localisation des racines des polynômes, mais j'ai eu la chance d'être invité très jeune à une conférence à Seattle où j'ai trouvé les racines de tous mes travaux futurs sur les facteurs.

à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller...”.

La plupart des mathématiciens adoptent une attitude pragmatique et se voient comme des explorateurs de ce “monde mathématique” dont ils n’ont aucun souhait de mettre l’existence en doute, et dont ils découvrent la structure par un mélange d’intuition, pas si étranger au “désir poétique”², et une bonne dose d’intenses périodes nécessitant leur concentration rationnelle.

Les générations successives de mathématiciens construisent l’“image mentale” de leurs propres compréhensions de ce monde et construisent des outils mentaux de plus en plus profonds (pénétrant) pour explorer des aspects précédemment cachés de cette réalité.

Là où les choses deviennent vraiment intéressantes, c’est lorsque des points inattendus émergent entre différentes parties du monde mathématique, qui étaient précédemment comprises comme étant éloignées les unes des autres dans les outils mentaux qu’une génération avait élaborés. A ce moment, on a le sentiment qu’un vent soudain a balayé le brouillard qui était sur les parties cachées d’un beau paysage. Dans mon propre travail, ce genre de “grande surprise” est venu principalement de l’interaction avec la physique. La profondeur des concepts mathématiques qui proviennent directement de la physique a été décrite dans la citation suivante de Hadamard :

“Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut qu’influencer le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses.”

Je terminerai par quelques conseils pratiques³.

- *Marches*

Un exercice très sain, quand on se bat avec un problème très difficile (impliquant souvent de nombreux calculs), est d’aller faire une longue promenade (sans papier ou crayon) et de faire les calculs dans sa tête (en dédaignant le premier sentiment “c’est trop compliqué pour être fait comme ça!”). Même si l’on n’y parvient pas, cela entraîne la “mémoire vive” et aiguise les compétences.

- *Se coucher*

Les mathématicien(ene)s ont habituellement du mal à expliquer à leur

2. comme souligné par le poète Paul Valéry.

3. En rappelant que chaque mathématicien est un “cas particulier”, ne prenez pas ce conseil trop à la lettre.

compagnon que les moments où ils travaillent le plus intensivement sont ceux où ils sont couchés dans le noir sur un canapé. Malheureusement, avec les emails et l'invasion des écrans d'ordinateurs dans tous les instituts de mathématiques, bien que cette manière de s'isoler soi-même et de se concentrer tende à devenir de plus en plus rare, elle reste la meilleure façon de réfléchir.

- *Etre courageux*

Il y a plusieurs phases dans le processus amenant à une “nouvelle découverte” mathématique. Et alors que la phase de “vérification” est effrayante et ne nécessite que rationalité et concentration, la phase “créative” est d'une nature totalement différente. En un certain sens, elle nécessite une sorte de protection de sa propre ignorance dans la mesure où il y a toujours des billions de raisons rationnelles de ne pas étudier un problème qui a déjà été étudié par des générations de mathématiciens.

- *Reculs*

Cela arrive souvent dans la vie d'un mathématicien et à n'importe quel niveau (souvent très tôt) de leur vie scientifique, d'obtenir un preprint d'un compétiteur par exemple et de se sentir perturbé. La seule recette que j'ai là est d'“essayer” de transformer (ce n'est pas toujours facile) ce sentiment de frustration en énergie positive pour travailler encore plus dur.

- *Approbaton à contrecœur*

Un collègue à moi m'a dit un jour “Nous⁴ travaillons pour l'approbaton à contrecœur de quelques amis”. Il est vrai que dans la mesure où le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, nous avons sérieusement besoin de cette approbaton d'une manière ou d'une autre, mais franchement, n'en attendez pas beaucoup... En fait, il n'y a pas moyen de leurrer le seul juge que l'on est à soi-même, et attendre trop du jugement d'autrui est un gaspillage de temps : jusqu'à aujourd'hui, aucun théorème n'a été prouvé par résultat d'un vote. Comme Feynman l'a dit “Pourquoi te préoccupes-tu de ce que les autres pensent ?!”.

4. les mathématiciens.